دورهٔ جمع‌بندی دوپینگ

سه‌شنبه

۱۴۰۴/۰۱/۱۹

بانک سؤالات کنکور:

الگو و دنباله + توان‌های گویا و عبارت‌های جبری + جامع هندسه

(فصل ۱ و ۳ دهم / فصل ۱ یازدهم: صفحه ۱ تا ۱۰ / فصل ۲ یازدهم / فصل ۶ دوازدهم)

دفترچه پاسخ

دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی

ریاضی

درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پیشنهادی
ریاضی	۷۲	۱	۷۲	۱۰۸ دقیقه

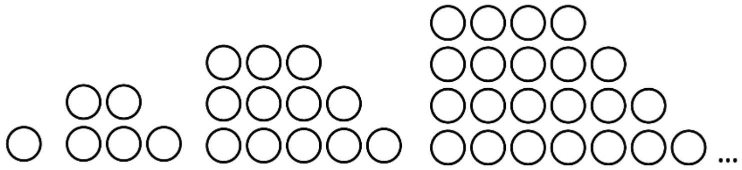
هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم		هفته پنجم	هفته ششم
مباحث پایه	جامع تابع ـ توابع نمایی و لگاریتمی	جامع مثلثات	جامع حد و پیوستگی	جامع مشتق و کاربرد مشتق	الگو و دنباله + توان‌های گویا عبارت‌های جبری + جامع هندسه	جامع شمارش، بدون شمردن

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

دفترچهٔ مکمل دوپینگ: این دفترچه روز بعد از آزمون دوپینگ هر درس در اختیار شما قرار می‌گیرد و شامل بانک سؤالات کنکورهای سراسری ۹۸ تا ۱۴۰۳ در همان مبحث است تا ضمن مرور مجدد، سیر تست‌های کنکور در هر مبحث را به دقت مورد بررسی قرار دهید.

سؤالات کنکور: فصل ۱ دهم

۱- در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل نهم، کدام است؟



۱) ۱۱۷
۲) ۱۲۰
۳) ۱۲۳
۴) ۱۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ — (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱) (کنکور داخل ۹۸)

با یک الگوی درجهٔ دوم طرف هستیم. ببینید:

$$۱\,,\,۵\,,\,۱۲\,,\,۲۲\,,\ldots \Rightarrow \begin{cases} ۲a=۳ \Rightarrow a=\frac{۳}{۲} \\ t_۱=۱ \\ t_۲=۵ \end{cases}$$

$$\underbrace{۴\quad ۷\quad ۱۰}_{۳\quad ۳}$$

پس مطابق جملهٔ عمومی الگو داریم:

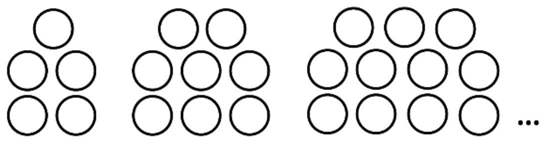
$$t_n=an^۲+bn+c \Rightarrow \begin{cases} \frac{۳}{۲}(۱)^۲+b(۱)+c=۱ \\ \frac{۳}{۲}(۲)^۲+b(۲)+c=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=-\frac{۱}{۲} \\ ۲b+c=-۱ \end{cases} \Rightarrow b=-\frac{۱}{۲},c=۰ \Rightarrow t_n=\frac{۳}{۲}n^۲-\frac{۱}{۲}n$$

تعداد نقطه‌ها در شکل نهم برابر است با:

$$t_۹=\frac{۳}{۲}(۹)^۲-\frac{۹}{۲}=۱۱۷$$

گروه آموزشی ماز

۲- در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل دوازدهم، کدام است؟



۱) ۳۴
۲) ۳۶
۳) ۳۸
۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ — (آسان ـ مفهومی ـ ۱۰۰۱) (کنکور خارج ۹۸)

تعداد نقطه‌ها در هر مرحله را می‌نویسیم: $۵,۸,۱۱,\ldots$

با نوشتن جملات الگو، متوجه می‌شویم که این جملات، یک الگوی عددی با جملهٔ اول $a_۱=۵$ و قدرنسبت $d=۳$ تشکیل می‌دهند. پس جملهٔ دوازدهم آن برابر است با:

$$a_{۱۲}=a_۱+۱۱d \Rightarrow a_{۱۲}=۵+۱۱(۳)=۵+۳۳=۳۸$$

گروه آموزشی ماز

۳- اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{۱\},\{۲,۳,۴\},\ldots$ در دستهٔ نهم، واسطهٔ حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

۱) ۷۱
۲) ۷۲
۳) ۷۳
۴) ۷۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ — (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۰۰۱) (کنکور داخل ۹۹)

با توجه به الگوی مقابل داریم:

شمارهٔ دسته	۱	۲	۳
دسته	$\{۱\}$	$\{۲,۳,۴\}$	$\{۵,۶,۷,۸,۹\}$
آخرین عضو دسته	۱	$۲^۲=۴$	$۳^۲=۹$

با توجه به جدول فوق می‌توان گفت که آخرین عضو دستهٔ nاُم برابر $n^۲$ است، لذا دستهٔ هشتم به $۸^۲$ ختم شده و دستهٔ نهم با $۸^۲+۱=۶۵$ شروع می‌شود و طبق الگو، آخرین عضو دستهٔ نهم نیز $۹^۲$ است. پس: $\{۶۵,\ldots,۸۱\}$: دستهٔ نهم

$$\text{واسطهٔ حسابی بین عدد اول و آخر}: \frac{۸۱+۶۵}{۲}=\frac{۱۴۶}{۲}=۷۳$$

۴- جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنبالهٔ حسابی، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند، قدر نسبت دنبالهٔ هندسی، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۹}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱) (کنکور خارج ۹۹)

نکته ۱:

جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت d برابر است با:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d$$

نکته ۲:

اگر جملات m اُم، n اُم و k اُم یک دنبالهٔ حسابی به‌ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با:

$$q = \frac{k-n}{n-m}$$

روش اول:

جملات سوم، هفتم و شانزدهم دنبالهٔ حسابی را به‌صورت $a_۳ = a_۱ + ۲d$، $a_۷ = a_۱ + ۶d$ و $a_{۱۶} = a_۱ + ۱۵d$ نوشته و می‌دانیم که آن‌ها جملات متوالی دنبالهٔ هندسی‌اند، بنابراین طبق رابطهٔ واسطهٔ هندسی داریم:

$$(a_۱ + ۶d)^۲ = (a_۱ + ۲d)(a_۱ + ۱۵d) \Rightarrow a_۱^۲ + ۱۲a_۱d + ۳۶d^۲ = a_۱^۲ + ۱۷a_۱d + ۳۰d^۲$$

$$۶d^۲ = ۵a_۱d \Rightarrow ۶d = ۵a_۱ \Rightarrow d = \frac{۵}{۶}a_۱$$

می‌دانیم که حاصل تقسیم دو جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی، با قدرنسبت آن (q) برابر است. پس:

$$q = \frac{a_۷}{a_۳} = \frac{a_۱ + ۶d}{a_۱ + ۲d} = \frac{a_۱ + ۶(\frac{۵}{۶}a_۱)}{a_۱ + ۲(\frac{۵}{۶}a_۱)} = \frac{a_۱ + ۵a_۱}{a_۱ + \frac{۵}{۳}a_۱} = \frac{۶a_۱}{\frac{۸}{۳}a_۱} = \frac{۱۸}{۸} = \frac{۹}{۴}$$

روش دوم:

مطابق نکتهٔ دوم درسنامه داریم:

$$q = \frac{k-n}{n-m}$$

طبق گفتهٔ سؤال، جملات سوم، هفتم و شانزدهم دنبالهٔ حسابی، جملات متوالی دنبالهٔ هندسی هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} m = ۳ \\ n = ۷ \\ k = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow q = \frac{۱۶-۷}{۷-۳} = \frac{۹}{۴}$$

۵- از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۶ متر توپی را به زمین پرتاب می‌کنیم. توپ پس از هر بار برخورد به زمین به اندازهٔ ۰/۸ ارتفاع قبلی از زمین به صورت قائم بلند می‌شود. پس از صدبار برخورد به زمین، در مجموع، توپ تقریباً چند متر بالا و پایین رفته است؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۷ ۳) ۶۰ ۴) ۶۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q و جملهٔ اول $a_۱$ برابر است با:

$$S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$$

مطابق جدول زیر:

دفعات برخورد به زمین	۱	۲	۳	...	۱۰۰
مسافت طی شده	۶	$۰/۸(۲\times۶)$	$(۰/۸)^۲(۲\times۶)$	...	$(۰/۸)^{۹۹}(۲\times۶)$

با توجه به جدول فوق، از جملهٔ دوم به بعد با یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱ = ۰/۸(۲\times۶)$ و قدرنسبت $q = ۰/۸$ مواجه هستیم و از نظام قدیم!

می‌دانیم که مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ به دست می‌آید، لذا برای جملات دوم تا صدم (۹۹ جمله) داریم:

$$S_{99} = 0/8(2\times 6)\times\frac{1-(0/8)^{99}}{1-0/8} = \frac{48}{5}\times\frac{1-(0/8)^{99}}{0/2} = 48\times\underbrace{(1-(0/8)^{99})}_{\sim 1} \sim 48$$

بنابراین مجموع کل مسافت طی شده برابر است با: $48+6=54$

توجه:
این سؤال خارج از مفاهیم کتاب درسی است.

گروه آموزشی ماز

۶- اگر ۸ و ۵ به‌ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جمله شانزدهم کدام است؟

۱) ۱۱/۶ ۲) ۹/۶ ۳) ۲/۴ ۴) ۱/۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

جملهٔ عمومی الگوی خطی به‌صورت $t_n = an+b$ می‌باشد.

$$\begin{cases} t_5 = 8 \\ t_{10} = 5 \end{cases} \xrightarrow{t_n=an+b} \begin{cases} 8 = 5a+b \\ 5 = 10a+b \end{cases} \xrightarrow{(-)} 5a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{5}$$

$$t_5 = 8 \Rightarrow 5a+b = 8 \Rightarrow 5(-\frac{3}{5})+b = 8 \Rightarrow -3+b = 8 \Rightarrow b = 11$$

$$\Rightarrow t_n = an+b \Rightarrow t_n = -\frac{3}{5}n+11 \xrightarrow{n=16} t_{16} = -\frac{3}{5}(16)+11 = \frac{-48}{5}+\frac{55}{5} = \frac{7}{5} = 1/4$$

گروه آموزشی ماز

۷- اعداد ۱۴ و ۱۷/۲ به‌ترتیب جملات پنجم و هفتم یک دنباله درجه دوم هستند. اگر ضریب بزرگ‌ترین درجه جمله عمومی، برابر $\frac{1}{70}$ قرینه جمله پنجم باشد، جمله پانزدهم چند برابر جمله اول است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۴ ۳) ۴/۶ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

جملهٔ عمومی دنبالهٔ درجه دوم به‌صورت $a_n = an^2+bn+c$ است.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{جملهٔ پنجم}: & n=5 \Rightarrow 14 = 25a+5b+c \\ \text{جملهٔ هفتم}: & n=7 \Rightarrow 17/2 = 49a+7b+c \end{array}\right\} \Rightarrow 3/2 = 24a+2b$$

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{1}{70}\times(-14) \Rightarrow a = -0/2 \;,\; b = 4 \\ 14 = 25(-0/2)+5(4)+c \Rightarrow c = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = -0/2n^2+4n-1$$

$$\frac{a_{15}}{a_1} = \frac{14}{2/8} = 5$$

گروه آموزشی ماز

۸- مجموعه‌های A و B به‌ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m-k=14$ و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های $A\cup B$ و $A\cap B$ برابر ۲۰ باشد، مجموعه $B-A$ چند عضو دارد؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

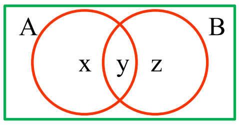
پاسخ: گزینهٔ ۴ (ساده ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

تعداد اعضای مجموعه:

$n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)$

$n(A')=n(U)-n(A)$

$n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)$



$$\left.\begin{matrix} m-k=۱۴\Rightarrow x-z=۱۴ \\ x+z=۲۰ \end{matrix}\right\}\Rightarrow x=۱۷\ ,\ z=۳\Rightarrow n(B-A)=۳$$

گروه آموزشی ماز

۹- در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d، تساوی $۶a_۲^۲=۵a_۳a+۳a_۲a$ برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به d کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

دنبالهٔ حسابی:

دنباله‌ای است که تفاضل هر دو جملهٔ متوالی آن مقدار ثابتی است.

اگر جملهٔ اول را a و قدرنسبت آن (تفاضل هر دو جملهٔ متوالی) را d بنامیم، جملهٔ عمومی آن به شکل مقابل خواهد بود:

$a_n=a_۱+(n-۱)d$

$$۶(a+d)^۲=۵a(a+۲d)+۳a(a+d)\Rightarrow ۲a^۲+ad-۶d^۲=۰$$

$$\Rightarrow a=\frac{-d\pm\sqrt{d^۲+۴۸d^۲}}{۴}=\frac{-d\pm ۷d}{۴}=\left\{\begin{matrix} -۲d \\ +\frac{۳}{۲}d \end{matrix}\right.$$

$$\frac{a_۴}{d}=\frac{a+۳d}{d}\begin{matrix} \nearrow ۱✓ \\ \searrow +۴/۵ \end{matrix}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- در یک دنباله هندسی، جمله اول مربع جمله دوم و جمله چهارم برابر ۵ است. جمله اول کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

دنبالهٔ هندسی

دنباله‌ای است که هر جملهٔ آن (غیر از جملهٔ اول) از ضرب یک مقدار ثابت در جملهٔ قبلی به‌دست می‌آید. این مقدار ثابت را قدر نسبت دنبالهٔ هندسی می‌گوییم و آن را با q یا r نشان می‌دهیم. جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به‌صورت $a_n=a_۱\times q^{n-۱}$ می‌باشد. در دنبالهٔ هندسی حاصل تقسیم هر جمله بر جملهٔ ماقبل برابر قدرنسبت است.

$$a_۱=(a_۲)^۲\Rightarrow a_۱=(a_۱q)^۲\Rightarrow a_۱=a_۱^۲q^۲\Rightarrow a_۱^۲q^۲-a_۱=۰$$

$$\Rightarrow a_۱(a_۱q^۲-۱)=۰\Rightarrow\left\{\begin{matrix} a_۱=۰\xrightarrow[a_۱\neq ۰]{\text{دنباله هندسی}}\text{غ ق ق} \\ a_۱q^۲-۱=۰\Rightarrow a_۱q^۲=۱\ (A) \end{matrix}\right.$$

از طرفی:

$$a_۴=۵\Rightarrow a_۱q^۳=۵\ (B)$$

$$\xrightarrow{B\div A}\frac{a_۱q^۳}{a_۱q^۲}=۵\Rightarrow q=۵\xrightarrow{a_۱q^۲=۱}a_۱\times ۵^۲=۱\Rightarrow ۲۵a_۱=۱\Rightarrow a_۱=\frac{۱}{۲۵}$$

گروه آموزشی ماز

سؤالات کنکور: فصل ۳ دهم

۱۱- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}-2\left(\sqrt[4]{9}-1\right)^{-1}$، کدام است؟

۱) $1+\sqrt{3}$ ۲) $-1+\sqrt{2}$ ۳) $1-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۰۰۳) (کنکور داخل ۹۹)

نکتهٔ ۱:

اگر مخرج کسری به‌صورت $\sqrt{m}\pm\sqrt{n}$ باشد، برای گویاکردن مخرج آن کسر، صورت و مخرج آن کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

نکتهٔ ۲:

$$(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})=m-n$$

ابتدا هر یک از عبارت‌های داده شده را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم. برای شروع ، عبارت اول را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5-\sqrt{6}}\times\frac{5+\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}}=\frac{10\sqrt{2}+15\sqrt{3}+4\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{5^2-(\sqrt{6})^2}=\frac{19\sqrt{3}+19\sqrt{2}}{25-6}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

می‌دانیم که $\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}$ است، پس حاصل عبارت دوم برابر است با:

$$B=2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}=2(\sqrt{3}-1)^{-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}+2}{2}=\sqrt{3}+1$$

حال حاصل خواسته‌شده برابر است با:

$$A-B=(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}+1)=\sqrt{2}-1$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}}+(2-\sqrt{3})^{-1}$، کدام است؟

۱) $1+2\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $1+\sqrt{3}$ ۴) 1

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۳) (کنکور خارج ۹۹)

نکتهٔ ۱:

$$(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})=m-n$$

نکتهٔ ۲:

اگر مخرج کسری به‌صورت $\sqrt{m}\pm\sqrt{n}$ باشد، برای گویاکردن مخرج آن کسر، صورت و مخرج آن کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

هر یک از عبارت‌های داده شده را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم. برای شروع، عبارت اول را در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}}\times\frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}=\frac{(3\sqrt{3}-1)(4-\sqrt{3})}{4^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3}=\frac{13\sqrt{3}-13}{13}=\sqrt{3}-1$$

حال نوبت عبارت دوم است که ساده شود:

$$B=(2-\sqrt{3})^{-1}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

حال مجموع دو عبارت برابر است با:

$$A+B=(\sqrt{3}-1)+(2+\sqrt{3})=1+2\sqrt{3}$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- فرض کنید $a=\sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$ و $b=\sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$. مقدار $(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2$، کدام است؟

۱) $4(2+\sqrt{3})$ ۲) $4(2-\sqrt{3})$ ۳) $16(2+\sqrt{3})$ ۴) $16(2-\sqrt{3})$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

$$\begin{cases}(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\\(a-b)^2=a^2+b^2-2ab\\(a-b)(a+b)=a^2-b^2\end{cases}$$

ابتدا به کمک دو اتحاد $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ و $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ داریم:

$$(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2=((a-b)^2)^2((a+b)^2)^2=(a-b)^4(a+b)^4=((a-b)(a+b))^4$$

حال به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$(a^2-b^2)^4=\left((a^2-b^2)^2\right)^2=\left(a^4+b^4-2a^2b^2\right)^2$$

حال مقادیر $a=\sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$ و $b=\sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$ را در رابطهٔ بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\left[(\sqrt[4]{\sqrt{6}-2})^4+(\sqrt[4]{\sqrt{6}+2})^4-2(\sqrt[4]{\sqrt{6}-2})^2(\sqrt[4]{\sqrt{6}+2})^2\right]^2=\left[(\sqrt{6}-2)+(\sqrt{6}+2)-2\sqrt{\sqrt{6}-2}\sqrt{\sqrt{6}+2}\right]^2$$

$$=\left[2\sqrt{6}-2\sqrt{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}\right]^2=\left[2\sqrt{6}-2\sqrt{(\sqrt{6})^2-(2)^2}\right]^2=\left[2\sqrt{6}-2\sqrt{6-4}\right]^2=\left[2\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right]^2=\left[2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right]^2$$

$$=4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=4(6-2\sqrt{12}+2)=4(8-4\sqrt{3})=4\times4(2-\sqrt{3})=16(2-\sqrt{3})$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- فرض کنید $a=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$، مقدار $(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2})^2(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2})^2$، کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۶
۳) ۲۵
۴) ۴۹

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

نکتهٔ ۱:

اتحاد مزدوج $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

نکتهٔ ۲:

اگر مخرج کسری به‌صورت $\sqrt{m}\pm\sqrt{n}$ باشد برای گویا کردن آن کسر، صورت و مخرج آن کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

ابتدا عبارت خواسته شده را به‌صورت زیر ساده‌سازی می‌کنیم:

$$(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2})^2(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2})^2\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}\left((a+\frac{1}{a})^2-2\right)^2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}+2-2\right)^2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2=a^4+\frac{1}{a^4}+2$$

حال در رابطهٔ فوق به جای a، فرض سؤال یعنی $a=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}})^4+\frac{1}{(\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}})^4}+2=7-4\sqrt{3}+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}+2\quad(*)$$

حال کسر $\frac{1}{7-4\sqrt{3}}$ را گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{7-4\sqrt{3}}\times\frac{7+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}=\frac{7+4\sqrt{3}}{49-48}=7+4\sqrt{3}$$

حال حاصل به‌دست‌آمده را در عبارت (*) قرار می‌دهیم:

$$7-4\sqrt{3}+(7+4\sqrt{3})+2=14+2=16$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- حاصل عبارت $\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}}\sqrt{1+\sqrt{7}}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt[4]{2}$
۳) ۲
۴) $2\sqrt[4]{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

در صورت قابل تعریف بودن $\sqrt[n]{a}$:

$\bullet\ a^{-۱}\times a=۱$ $\qquad$ $\bullet\ \sqrt[n]{a}=\sqrt[nm]{a^m}$

$$A=\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}}\sqrt{۱+\sqrt{۷}}=\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}}\sqrt[۴]{(۱+\sqrt{۷})^۲}$$

$$A=\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}\times(۱+\sqrt{۷})^۲}=\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}\times(۱+۷+۲\sqrt{۷})}$$

$$A=\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}\times(۸+۲\sqrt{۷})}=\sqrt[۴]{\underbrace{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}\times۲(۴+\sqrt{۷})}_{\times\ =۱}}=\sqrt[۴]{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- حاصل عبارت $\left(\dfrac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲}\right)\left(\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}}\right)$ کدام است؟

۱) -۱ $\qquad$ ۲) $-\sqrt{۲}$ $\qquad$ ۳) ۱ $\qquad$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

$$A=\underbrace{\left(\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲}\right)}_{x}\underbrace{\left(\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}}\right)}_{y<۰}$$

$$x=\frac{\left(\sqrt{۲}+\sqrt{۵}\right)}{\sqrt{۲}\left(\sqrt{۵}+\sqrt{۲}\right)}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$y^۲=۳-\sqrt{۵}+۳+\sqrt{۵}-۲\sqrt{۹-۵}\Rightarrow y^۲=۲\Rightarrow y=\pm\sqrt{۲}\xrightarrow{y<۰}y=-\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow A=x\cdot y=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\left(-\sqrt{۲}\right)=-۱$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- حاصل عبارت $\dfrac{\sqrt[۳]{۳\sqrt{۲۷}}\times۳^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{\sqrt[۳]{۳}}\times۸۱^{-\frac{۳}{۴}}}$ کدام است؟

۱) ۲۷ $\qquad$ ۲) ۸۱ $\qquad$ ۳) $۲۷\sqrt[۳]{۳}$ $\qquad$ ۴) $۸۱\sqrt[۳]{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

قواعد ساده‌سازی رادیکال‌ها

اگر یک رادیکال به توان فرجه‌اش برسد، عبارت از زیر رادیکال بیرون می‌آید.

۱) $(\sqrt[n]{a})^n=a$

اگر توان عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ رادیکال برابر باشد، دو حالت به وجود می‌آید:

الف) اگر توان و فرجه برابر و هر دو فرد باشد، عبارت از زیر رادیکال بیرون می‌آید.

۲) $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & \text{فرد } n\\ |a| & \text{زوج } n\end{cases}$

ب) اگر توان و فرجه برابر هر دو زوج باشد، عبارت از زیر رادیکال بیرون می‌آید و درون قدرمطلق می‌رود.

۳) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a}$ باید تعریف شده باشد.

۴) $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b}}=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m\times n]{b}$

قواعد محاسبهٔ اعداد توان‌دار

۱) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ۲) $a^n \times b^n = (a\times b)^n$

۳) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ۴) $a^n \div b^n = (\frac{a}{b})^n$

۵) $a^{\circ} = ۱ \quad (a \neq \circ)$ ۶) $(a^m)^n = a^{m\times n}$

۷) $a^{-n} = \frac{۱}{a^n} \quad (a \neq \circ) \xrightarrow{\text{نتیجه}} (\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

با توجه به روابط مقابل، داریم:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad ; \quad a > \circ,\ m,n \in \mathbb{N} \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad ; \quad a > \circ \end{cases}$$

$$A = \frac{\sqrt[۳]{۳\sqrt{۲۷}} \times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{\sqrt[۳]{۳}} \times ۸۱^{-\frac{۳}{۴}}} = \frac{\sqrt[۳]{\sqrt{۹\times ۲۷}} \times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{\sqrt[۳]{۳}} \times ((۳)^۴)^{-\frac{۳}{۴}}} = \frac{\sqrt[۶]{۳^۲\times ۳^۳} \times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt[۶]{۳} \times ۳^{-۳}} = \frac{\sqrt[۶]{۳^۵} \times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt[۶]{۳} \times ۳^{-۳}}$$

$$A = \frac{۳^{\frac{۵}{۶}} \times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{۳^{\frac{۱}{۶}} \times ۳^{-۳}} = \frac{۳^{\frac{۵}{۶}+\frac{۱}{۳}}}{۳^{\frac{۱}{۶}-۳}} = \frac{۳^{\frac{۷}{۶}}}{۳^{-\frac{۱۷}{۶}}} = ۳^{\frac{۷}{۶}-(-\frac{۱۷}{۶})} = ۳^{\frac{۷}{۶}+\frac{۱۷}{۶}}$$

$$A = ۳^{\frac{۲۴}{۶}} = ۳^۴ = ۸۱$$

نکته

توجه کنید که $m,n \in Q$ و $a \in \mathbb{R}^+$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} a^m \times a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \end{cases}$$

۱۸- نقاط $A(-۱,۴)$، $B(۳,۱)$، $C(x,y)$ و $D(-۱-x, y+۳)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های D و C مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:

ـ فاصلهٔ ۲ نقطهٔ $A\begin{vmatrix} a_۱ \\ a_۲ \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{vmatrix}$: $d = \sqrt{(b_۲ - a_۲)^۲ + (b_۱ - a_۱)^۲}$

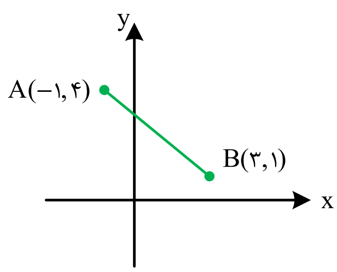
ـ دو خط غیرموازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (-۱) باشد.

$m_{CD} = m_{AB} = -\frac{۳}{۴}$

$\frac{۳}{-۲x-۱} = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow ۲x+۱ = ۴ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$

$C(\frac{۳}{۲}, y)$, $CB \perp AB$

$m_{CB} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \frac{y-۱}{\frac{۳}{۲}-۳} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow y-۱ = -۲ \Rightarrow y = -۱$



$$\left.\begin{array}{l} C(\frac{۳}{۲},-۱) \\ B(۳,۱) \end{array}\right\} \Rightarrow BC=\sqrt{\frac{۹}{۴}+۴}=\frac{۵}{۲} \quad \Rightarrow \text{محیط}=۲(۵+\frac{۵}{۲})=۱۵$$

$$\left.\begin{array}{l} B(۳,۱) \\ A(-۱,۴) \end{array}\right\} \Rightarrow AB=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

سؤالات کنکور: فصل ۱ یازدهم

۱۹- سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۹۸)

اگر سرعت حرکت آب رودخانه را V فرض کنیم، سرعت قایق در خلاف جهت آب رودخانه $۱۰۰-V$ و سرعت قایق در جهت آب رودخانه $۱۰۰+V$ است.

حال طبق رابطهٔ $t=\frac{x}{v}$، زمان طی شدهٔ قایق در خلاف جهت آب رودخانه $t_۲=\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-V}$ و در جهت آب رودخانه $t_۱=\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+V}$ خواهد بود. از طرفی می‌دانیم که اختلاف این زمان‌ها ۵ دقیقه است، پس:

$$t_۲-t_۱=۵ \Rightarrow \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-V}-\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+V}=۵ \Rightarrow \frac{۱۲۰۰(۱۰۰+V)-۱۲۰۰(۱۰۰-V)}{(۱۰۰-V)(۱۰۰+V)}=۵$$

$$\Rightarrow \frac{۲۴۰۰V}{۱۰۰۰۰-V^۲}=۵ \Rightarrow V^۲+۴۸۰V-۱۰۰۰۰=۰ \Rightarrow (V+۵۰۰)(V-۲۰)=۰ \Rightarrow \begin{cases} V=۲۰ \checkmark \\ V=-۵۰۰ \times \end{cases}$$

توجه:

از درس فیزیک می‌دانیم که $x=Vt$، پس: $t=\frac{x}{V}$.

گروه آموزشی ماز

۲۰- اگر $۳a+\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲$ باشد، عدد $\frac{a+۱}{a}$، کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۹۸)

ابتدا $۳a$ را به طرف راست تساوی برده و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲-۳a \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۲a^۲+۴a=۹a^۲-۱۲a+۴ \Rightarrow ۷a^۲-۱۶a+۴=۰$$

$$\Rightarrow a=\frac{۱۶\pm\sqrt{۱۴۴}}{۱۴}=\frac{۱۶\pm۱۲}{۱۴} \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \times \\ a=\frac{۲}{۷} \checkmark \end{cases}$$

دقت شود که $a=۲$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند، حال مقدار خواسته شده برابر است با

$$\frac{a+۱}{a}=۱+\frac{۱}{a}=۱+\frac{۱}{\frac{۲}{۷}}=۱+\frac{۷}{۲}=۴/۵$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- پرنده‌ای فاصلهٔ یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۳/۵ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۹۸)

اگر سرعت پرنده در هوای آرام را V فرض کنیم، سرعت پرنده در جهت موافق باد $V+۵$ و در جهت مخالف باد $V-۵$ است.

از طرفی می‌دانیم که $t=\frac{x}{V}$ است و می‌دانیم که مدت زمان رفت و برگشت در مجموع ۹ دقیقه است، پس:

$$t_1+t_2=9\Rightarrow \frac{1}{V+5}+\frac{1}{V-5}=\frac{9}{60}\Rightarrow \frac{2V}{V^2-25}=\frac{3}{20}\Rightarrow 3V^2-75=40V\Rightarrow 3V^2-40V-75=0$$

$$V=\frac{40\pm\sqrt{2500}}{6}\Rightarrow\begin{cases}V=15 & \checkmark\\ V=\frac{-5}{3} & \times\end{cases}$$

توجه: به واحدها دقت کن.

گروه آموزشی ماز

۲۲- اگر $2a+\sqrt{3a+16}=1$ باشد، عدد $4a+9$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۹۸)

ابتدا، $2a$ را به سمت راست تساوی برده و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2a+\sqrt{3a+16}=1\Rightarrow\sqrt{3a+16}=1-2a\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}3a+16=1+4a^2-4a\Rightarrow 4a^2-7a-15=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{7\pm\sqrt{289}}{8}\Rightarrow\begin{cases}a=3\times\\ a=-\frac{5}{4}\checkmark\end{cases}$$

دقت شود که $a=3$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند. حال مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\Rightarrow 4a+9=4(-\frac{5}{4})+9=4$$

گروه آموزشی ماز

۲۳- معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) ۱- ۴) $-\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۹۹)

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند:

مجموع ریشه‌ها: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها: $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

می‌دانیم که حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $P=\frac{c}{a}$ و مجموع ریشه‌ها برابر $S=\frac{-b}{a}$ است.

$$\begin{cases}S=-\frac{b}{a}=-\frac{2m-1}{3}\\ P=\frac{c}{a}=\frac{2-m}{3}\end{cases}\xrightarrow{S=\frac{1}{P}}SP=1\Rightarrow\frac{1-2m}{3}\times\frac{2-m}{3}=1\Rightarrow 2m^2-5m-7=0$$

$$\Rightarrow 2m^2-5m-7=0\xrightarrow{b=a+c}\begin{cases}m_1=-1\\ m_2=-\frac{c}{a}=\frac{7}{2}\end{cases}$$

از طرفی چون معادله دو ریشه دارد، باید $\Delta>0$ باشد:

$$\Delta=b^2-4ac=(2m-1)^2-12(2-m)>0\Rightarrow\begin{cases}m=-1\Rightarrow\Delta=9-12(3)=-27<0\times\\ m=\frac{7}{2}\Rightarrow\Delta=36-12(-\frac{3}{2})=54>0\checkmark\end{cases}$$

لذا $m=\frac{۷}{۲}$ مورد قبول است.

گروه آموزشی ماز

۲۴- مثلثی با رأس‌های $A(۱,۵)$ ، $B(۷,۳)$ و $C(۲,-۲)$ ، مفروض است. اندازهٔ ارتفاع AH در مثلث ABC، کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۹۹)

معادلهٔ خطی که از دو نقطه به مختصات $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ می‌گذرد برابر است با:

$$y-y_۲=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}(x-x_۲) \quad \text{یا} \quad y-y_۱=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}(x-x_۱)$$

اندازهٔ ارتفاع AH، با فاصلهٔ رأس A از ضلع BC برابر است، بنابراین معادلهٔ ضلع BC را نوشته و فاصلهٔ رأس A را از آن پیدا می‌کنیم:

$$\text{BC معادلهٔ ضلع}: y-(-۲)=\frac{۳-(-۲)}{۷-۲}(x-۲)\Rightarrow BC: y+۲=x-۲\Rightarrow BC: -x+y+۴=۰$$

$$AH=\frac{|-۱+۵+۴|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۸}{\sqrt{۲}}=۴\sqrt{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲+mx+m+۶=۰$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. بازهٔ مقادیر m، کدام است؟

۱) $(-۴,۰)$ ۲) $(-۴,-۲)$ ۳) $(-۶,۰)$ ۴) $(-۶,-۴)$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۹۹)

می‌دانیم اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ دارای دو ریشهٔ مثبت باشد، $\Delta>۰$، $S>۰$ و $P>۰$ است، پس:

$$\begin{cases}\Delta>۰\Rightarrow b^۲-۴ac>۰\Rightarrow m^۲-۴(۲)(m+۶)>۰\Rightarrow m^۲-۸m-۴۸>۰\Rightarrow (m-۱۲)(m+۴)>۰\Rightarrow m>۱۲ \ \text{یا}\ m<-۴\\ S>۰\Rightarrow -\frac{b}{a}>۰\Rightarrow -\frac{m}{۲}>۰\Rightarrow m<۰\\ P>۰\Rightarrow \frac{c}{a}>۰\Rightarrow \frac{m+۶}{۲}>۰\Rightarrow m>-۶\end{cases}$$

اگر از جواب‌های به‌دست‌آمده اشتراک بگیریم، بازهٔ مورد قبول برای m برابر $(-۶,-۴)$ خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

۲۶- اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y+۲x=۱۶$ ، $۲y-x=۲$ و $y=۰$ هستند. اندازهٔ میانهٔ نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحهٔ مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) ۵ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۹۹)

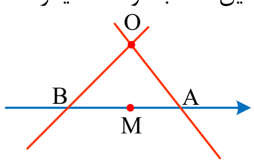
دو نقطه با مختصات $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ مفروض هستند:

$$\text{فاصلهٔ دو نقطه} = AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

$$\text{AB مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط}: M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲})$$

ضلع افقی این مثلث خط $y=۰$ است. حال برای پیدا کردن نقاط تلاقی این خط با دو خط دیگر، دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

(شکل فرضی)



$$\begin{cases}y+۲x=۱۶\\ ۲y-x=۲\end{cases}\xrightarrow{y=۰}\begin{cases}A(۸,۰)\\ B(-۲,۰)\end{cases}$$

همان‌طورکه از شکل بالا مشخص است، نقطهٔ M، وسط AB است، پس:

$$x_M=\frac{۸-۲}{۲}=۳\Rightarrow M(۳,۰)$$

حال برای پیدا کردن مختصات نقطهٔ O، خطوط $y+2x=16$ و $2y-x=2$ را با هم تلاقی می‌دهیم:

$$\begin{cases} y+2x=16 \\ 2y-x=2 \end{cases} \Rightarrow O(6,4)$$

در نهایت فاصلهٔ نقطهٔ O از M (میانهٔ نظیر ضلع افقی) برابر است با:

$$OM=\sqrt{(6-3)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x=5-x^2$ باشند. $\frac{1}{(x_2+1)^3}$ و $\frac{1}{(x_1+1)^3}$، ریشه‌های کدام معادله هستند؟

۱) $125x^2+16x=1$

۲) $125x^2=16x+1$

۳) $125x^2=12x+1$

۴) $125x^2+12x=1$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند:

- $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$
- $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$
- $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$
- $\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$

ابتدا معادلهٔ $x=5-x^2$ را به‌صورت روبه‌رو نوشته و داریم:

$$x=5-x^2 \Rightarrow x^2+x-5=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-1 \\ x_1x_2=\frac{c}{a}=-5 \end{cases}$$

حال با داشتن ریشه‌های معادله جدید، می‌توان مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را محاسبه کرد:

$$P_{new}=\left(\frac{1}{(x_1+1)^3}\right)\left(\frac{1}{(x_2+1)^3}\right)=\frac{1}{(x_1+1)^3(x_2+1)^3}=\frac{1}{((x_1+1)(x_2+1))^3}=\frac{1}{(x_1x_2+x_1+x_2+1)^3}$$

$$P_{new}=\frac{1}{((-5)+(-1)+1)^3}=-\frac{1}{125}$$

$$S_{new}=\frac{1}{(x_1+1)^3}+\frac{1}{(x_2+1)^3}=\frac{(x_1+1)^3+(x_2+1)^3}{(x_1+1)^3\times(x_2+1)^3}=\frac{(x_1^3+3x_1^2+3x_1+1)+(x_2^3+3x_2^2+3x_2+1)}{(x_1x_2+x_1+x_2+1)^3}$$

$$S_{new}=\frac{(-1)^3-3(-5)(-1)+3((-1)^2-2(-5))+3(-1)+2}{(-5+(-1)+1)^3}=\frac{-1-15+3(11)-3+2}{-125}=\frac{16}{-125}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{new}=-\frac{16}{125} \\ P_{new}=-\frac{1}{125} \end{cases}$$

می‌دانیم که اگر S و P به‌ترتیب مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ای باشند، آن‌گاه آن معادله را می‌توان به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ نمایش داد. بنابراین:

$$x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0 \xrightarrow{\times 125} 125x^2+16x-1=0$$

توجه:

البته تنها با محاسبهٔ $S_{جدید}$ می‌توانستیم به گزینهٔ درست برسیم.

گروه آموزشی ماز

۲۸- فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی منحنی‌های $۲y = x^۲$ و $x = \sqrt{y+۳} - \sqrt{y-۳}$ تا مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

فاصلهٔ نقطهٔ A به مختصات $A(x_A, y_A)$ از مبدأ مختصات برابر است با: $OA = \sqrt{x_A^۲ + y_A^۲}$

در معادلهٔ $۲y = x^۲$، به جای x، عبارت $\sqrt{y+۳} - \sqrt{y-۳}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲y = x^۲ \Rightarrow ۲y = (\sqrt{y+۳} - \sqrt{y-۳})^۲ \Rightarrow ۲y = (y+۳) - ۲\sqrt{y+۳}\sqrt{y-۳} + (y-۳) \Rightarrow ۲y = ۲y - ۲\sqrt{y^۲ - ۹}$$

$$\Rightarrow \sqrt{y^۲ - ۹} = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۹ = ۰ \Rightarrow y = \pm ۳$$

چون $۲y = x^۲$ است بنابراین مقدار y نمی‌تواند منفی باشد، پس $y = ۳$ قابل قبول است. پس: $۲y = x^۲ \Rightarrow ۲ \times ۳ = x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۶ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۶}$

چون $x = \sqrt{y+۳} - \sqrt{y-۳}$ است و با توجه به اینکه $y > ۰$ است، پس $\sqrt{y+۳} > \sqrt{y-۳}$ است، پس x نیز مقداری مثبت است و در نتیجه فقط $x = \sqrt{۶}$ قابل قبول است.

پس مختصات نقطهٔ تلاقی دو منحنی به‌صورت $A(\sqrt{۶}, ۳)$ است، بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{x_A^۲ + y_A^۲} = \sqrt{(\sqrt{۶})^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۶+۹} = \sqrt{۱۵}$$

توجه:
چون این سؤال فاصله تا مبدأ را می‌خواست نیازی به حذف کردن x و yهای نامطلوب نبود و هر دو به ما جواب درست می‌داد.

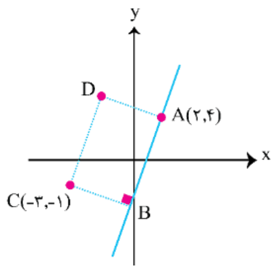
گروه آموزشی ماز

۲۹- شیب نیم‌خطی با نقطهٔ شروع $A(۲,۴)$ برابر ۳ است. مستطیل ABCD را چنان می‌سازیم، که نقطهٔ B روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن $C(-۳,-۱)$ باشد. محیط مستطیل، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) $۶\sqrt{۱۰}$ ۴) $۳\sqrt{۱۰}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

ابتدا معادلهٔ خطی که نقاط A و B روی آن قرار دارند و شیب آن برابر ۳ است را پیدا می‌کنیم:



$$\begin{cases} A(۲,۴) \\ m = ۳ \end{cases} \Rightarrow y - ۴ = ۳(x-۲) \Rightarrow y = ۳x - ۲$$

حال با توجه به اینکه نقطهٔ B روی خط به معادلهٔ $y = ۳x - ۲$ قرار دارد، مختصات آن را می‌توان به‌صورت $B(\alpha, ۳\alpha - ۲)$ نشان داد و از طرفی چون پاره‌خط CB بر خط به معادلهٔ $y = ۳x - ۲$ عمود است، پس شیب آن عکس و قرینهٔ شیب خط $y = ۳x - ۲$ است، پس: $m_{BC} = -\frac{۱}{۳}$

$$\begin{cases} B(\alpha, ۳\alpha - ۲) \\ C(-۳,-۱) \end{cases} \Rightarrow m_{BC} = \frac{-۱-(۳\alpha-۲)}{-۳-\alpha} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{-۱-۳\alpha+۲}{-(۳+\alpha)} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow -۳\alpha + ۱ = \frac{۳+\alpha}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳ + \alpha = -۹\alpha + ۳ \Rightarrow \alpha = ۰$$

بنابراین مختصات نقطهٔ B به‌صورت $B(۰,-۲)$ است. حال فاصلهٔ نقطهٔ C از B و نیز فاصلهٔ نقطهٔ A از B را می‌یابیم:

$$\begin{cases} C(-۳,-۱) \\ B(۰,-۲) \end{cases} \Rightarrow BC = \sqrt{(-۳-۰)^۲ + (-۱+۲)^۲} = \sqrt{۹+۱} = \sqrt{۱۰}$$

$$\begin{cases} A(۲,۴) \\ B(۰,-۲) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{(۰-۲)^۲ + (-۲-۴)^۲} = \sqrt{۴+۳۶} = \sqrt{۴۰} = ۲\sqrt{۱۰}$$

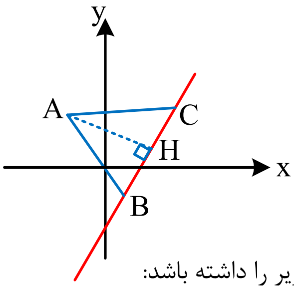
بنابراین محیط مستطیل برابر است با $AB + BC + CD + DA = ۲(AB + BC) = ۲(\sqrt{۱۰} + ۲\sqrt{۱۰}) = ۲(۳\sqrt{۱۰}) = ۶\sqrt{۱۰}$

۳۰- نقطهٔ $H(۲,۱)$ را روی خط $۳x-y=۵$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می‌سازیم، به‌طوری‌که محیط مثلث $\sqrt{۲۷۰}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A، کدام است؟

۱) $(\frac{۷}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{۱۳}{۲},-\frac{۱}{۲})$ ۳) $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱۱}{۶})$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

ابتدا خط $۳x-y=۵$ را رسم کرده و مثلث ABC را می‌سازیم:



می‌دانیم که محیط مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر $\sqrt{۲۷۰}$ است. ABC محیط $=\sqrt{۲۷۰}=۳\sqrt{۳۰}$

پس اندازهٔ هر ضلع آن برابر $\sqrt{۳۰}$ بوده، بنابراین اندازهٔ ارتفاع آن برابر است با: $AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\sqrt{۳۰}=\frac{\sqrt{۹۰}}{۲}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$

ما به دنبال مختصات نقطهٔ A هستیم، بنابراین به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم و گزینه‌ای را قبول می‌کنیم که دو شرط زیر را داشته باشد:

۱) اندازهٔ AH برابر $\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$ باشد.

۲) چون AH بر خط $۳x-y=۵$ عمود است، پس شیب AH باید عکس و قرینهٔ شیب خط $۳x-y=۵$ باشد، یعنی $m_{AH}=-\frac{۱}{۳}$ باشد.

اگر گزینه‌ها را بررسی کنیم به درستی گزینهٔ ۲ پی می‌بریم، ببینیم:

$$\begin{cases} A(\frac{۱۳}{۲},-\frac{۱}{۲}) \\ H(۲,۱) \end{cases}$$

$$AH=\sqrt{(\frac{۱۳}{۲}-۲)^۲+(-\frac{۱}{۲}-۱)^۲}=\sqrt{\frac{۸۱}{۴}+\frac{۹}{۴}}=\sqrt{\frac{۹۰}{۴}}=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۲}$$

$$m_{AH}=\frac{۱-(\frac{-۱}{۲})}{۲-\frac{۱۳}{۲}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۹}{۲}}=\frac{-۱}{۳}$$

بررسی نادرستی سایرگزینه‌ها به عهدهٔ خودتان.

گروه آموزشی ماز

۳۱- فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x=x^۲-۴$ باشند، ریشه‌های کدام معادله $x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲}$ و $x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱}$، است؟

۱) $۴x^۲=۵۱x+۲۲۱$ ۲) $۴x^۲+۵۱x=۲۲۱$
۳) $۴x^۲=۵۱x+۱۹۷$ ۴) $۴x^۲+۵۱x=۱۹۷$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند:

- $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$
- $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$
- $\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P$
- $\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS$

ابتدا معادلهٔ $x=x^۲-۴$ را به‌صورت زیر نوشته و داریم:

$$x=x^۲-۴\Rightarrow x^۲-x-۴=۰\Rightarrow\begin{cases} x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=۱ \\ x_۱x_۲=\frac{c}{a}=-۴ \end{cases} \quad (*)$$

حال با داشتن ریشه‌های معادلهٔ جدید، می‌توان مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را محاسبه کرد:

$$P_{new}=(x_1^3+\frac{1}{x_2})(x_2^3+\frac{1}{x_1})=(x_1^3x_2^3)+\underbrace{x_1^2+x_2^2}_{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_2}=(x_1x_2)^3+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+\frac{1}{x_1x_2}$$

حال طبق روابط (*) داریم:

$$P_{new}=(-4)^3+(1)^2-2(-4)+\frac{1}{-4}=-64+1+8-\frac{1}{4}=-\frac{221}{4}$$

$$S_{new}=(x_1^3+\frac{1}{x_2})+(x_2^3+\frac{1}{x_1})=x_1^3+x_2^3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

$$\xrightarrow{(*)}S_{new}=(1)^3-3(-4)(1)+\frac{1}{-4}=1+12-\frac{1}{4}=\frac{51}{4}\Rightarrow\begin{cases}S_{new}=\frac{51}{4}\\ P_{new}=\frac{-221}{4}\end{cases}$$

می‌دانیم که اگر S و P به‌ترتیب مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ای باشند، آن‌گاه آن معادله را می‌توان به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ نمایش داد، لذا:

$$x^2-\frac{51}{4}x-\frac{221}{4}=0\xrightarrow{\times 4}4x^2-51x-221=0\Rightarrow 4x^2=51x+221$$

گروه آموزشی ماز

۳۲- **فرض کنید $a,b,c\in\{1,2,\dots,9\}$. چند معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $ax^2+bx-c=0$ می‌توان نوشت که فاصلهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌های هر معادله با جمع ریشه‌های آن معادله، دو واحد باشد؟**

۱) ۲۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ ترکیبی / مفهومی ـ ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

با توجه به معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx-c=0$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\text{مجموع ریشه‌ها}=S=-\frac{b}{a}\\ \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=P=\frac{-c}{a}\end{cases}$$

طبق گفتهٔ سؤال می‌دانیم که فاصلهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌ها با جمع ریشه‌های معادله برابر ۲ واحد است، لذا:

$$|P-S|=2\Rightarrow\left|-\frac{c}{a}-(-\frac{b}{a})\right|=2\Rightarrow\left|-\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\right|=2\Rightarrow\left|\frac{b-c}{a}\right|=2$$

می‌دانیم که $a\in\{1,2,\dots,9\}$ و $a>0$ است، پس

$$\frac{|b-c|}{a}=2\Rightarrow|b-c|=2a$$

با توجه به رابطهٔ فوق می‌توان گفت که b و c را از اعداد $\{1,2,\dots,9\}$ باید طوری انتخاب کنیم که تفاضل آن‌ها برابر $2a$ باشد به عبارتی b و c باید طوری انتخاب شوند که تفاضل آن‌ها عددی زوج باشد، پس:

الف) b و c از اعداد فرد انتخاب شوند: $\binom{5}{2}=10\quad b,c\in\{1,3,5,7,9\}$

ب) b و c از اعداد زوج انتخاب شوند: $\binom{4}{2}=6\quad b,c\in\{2,4,6,8\}$

بنابراین برای انتخاب b و c، $10+6=16$ حالت داریم، ولی با توجه به $|b-c|$ می‌توان گفت که b و c می‌توانند جابه‌جا شوند، بنابراین تعداد کل حالات مطلوب برابر $2\times16=32$ حالت است.

گروه آموزشی ماز

۳۳- سهمی $y=-x^{۲}+۲x+۱$ خط راست گذرا از نقطهٔ $(۱,۰)$ و با عرض از مبدأ -۱ را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، فاصلهٔ رأس سهمی از نقطهٔ M، کدام مضرب $\sqrt{۲۶}$ است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

نکتهٔ ۱:

اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ باشند، فاصلهٔ دو نقطه برابر است با:

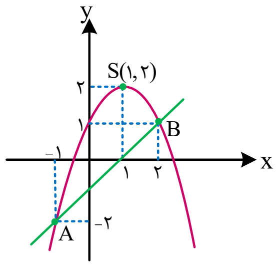
$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^{۲}+(y_۲-y_۱)^{۲}}$$

نکتهٔ ۲:

اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ باشند، مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB برابر است با

$$M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$$

می‌دانیم خط راستی که از نقطهٔ $(۱,۰)$ عبور کرده و عرض از مبدأ آن برابر -۱ است، خط $y=x-۱$ است، حال برای پیداکردن نقاط تلاقی این خط با سهمی $y=-x^{۲}+۲x+۱$، داریم:



$$\begin{cases} y=-x^{۲}+۲x+۱ \\ y=x-۱ \end{cases} \Rightarrow -x^{۲}+۲x+۱=x-۱ \Rightarrow x^{۲}-x-۲=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۲\rightarrow y=۱ \\ x=-۱\rightarrow y=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-۱,-۲) \\ B(۲,۱) \end{cases}$$

حال باید مختصات نقطهٔ M (وسط پاره‌خط AB) را پیدا کنیم:

$$M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲}) \Rightarrow M(\frac{-۱+۲}{۲},\frac{-۲+۱}{۲}) \Rightarrow M(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$$

مطابق ضابطهٔ سهمی یعنی $y=-x^{۲}+۲x+۱$، می‌دانیم که مختصات رأس سهمی برابر $S(۱,۲)$ است حال باید فاصلهٔ نقطهٔ M را از نقطهٔ S پیدا کنیم:

$$\begin{cases} M(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}) \\ S(۱,۲) \end{cases} \Rightarrow SM=\sqrt{(\frac{۱}{۲}-۱)^{۲}+(-\frac{۱}{۲}-۲)^{۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۲۵}{۴}}=\sqrt{\frac{۲۶}{۴}}=\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ M از رأس سهمی، $\frac{۱}{۲}$ برابر $\sqrt{۲۶}$ است.

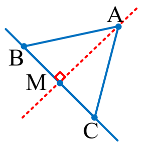
گروه آموزشی ماز

۳۴- نقاط B، C و $M(۳,۲)$ روی خط $x+۲y=۷$ قرار دارند. مثلث متساوی‌الساقین ABC را چنان می‌سازیم که اندازهٔ میانهٔ AM برابر $۵\sqrt{۵}$ واحد و BC قاعدهٔ مثلث باشد، طول مختصات یک رأس A، کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۲ ۳) -۵ ۴) -۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

با توجه به شکل مقابل و با توجه به اینکه مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین نقطهٔ A روی عمودمنصف پاره‌خط BC قرار دارد، پس شیب پاره‌خط AM، عکس و قرینهٔ شیب پاره‌خط BC است، لذا:



$$x+۲y=۷ \rightarrow m=-\frac{۱}{۲} \rightarrow m_{AM}=۲$$

می‌دانیم که شیب پاره‌خط AM برابر ۲ است و از نقطهٔ $M(۳,۲)$ نیز عبور می‌کند، پس:

$$y-۲=۲(x-۳) \Rightarrow y=۲x-۴ \text{ (معادلهٔ عمودمنصف)}$$

حال اگر مختصات نقطهٔ A را به صورت $A(\alpha,\beta)$ فرض کنیم، با علم به اینکه طول پاره‌خط AM برابر $۵\sqrt{۵}$ است. داریم:

$$AM=\sqrt{(\alpha-۳)^{۲}+(\beta-۲)^{۲}}=۵\sqrt{۵} \Rightarrow (\alpha-۳)^{۲}+(\beta-۲)^{۲}=۱۲۵ \quad (*)$$

چون معادله عمودمنصف به صورت $y = ۲x - ۴$ است، بنابراین مختصات هر نقطه روی آن به‌صورت $(x, ۲x - ۴)$ است، پس مختصات نقطهٔ A را می‌توان به‌صورت $A(\alpha, ۲\alpha - ۴)$ نیز نشان داد، پس $\beta = ۲\alpha - ۴$ است. حال مطابق رابطهٔ (*) داریم:

$$(\alpha-۳)^۲ + (۲\alpha - ۴ - ۲)^۲ = ۱۲۵ \Rightarrow (\alpha-۳)^۲ + (۲\alpha-۶)^۲ = ۱۲۵$$

$$\Rightarrow (\alpha-۳)^۲ + \underbrace{(۲(\alpha-۳))^۲}_{۴(\alpha-۳)^۲} = ۱۲۵ \Rightarrow (\alpha-۳)^۲ + ۴(\alpha-۳)^۲ = ۱۲۵ \Rightarrow ۵(\alpha-۳)^۲ = ۱۲۵$$

$$\Rightarrow (\alpha-۳)^۲ = ۲۵ \Rightarrow \begin{cases} \alpha - ۳ = ۵ \to \alpha = ۸ \\ \alpha - ۳ = -۵ \to \alpha = -۲ \end{cases}$$

که فقط $\alpha = -۲$ در گزینه‌ها وجود دارد.

گروه آموزشی ماز

۳۵- به ازای دو مقدار a، یک ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲ - ax + ۴ = ۰$، سه برابر ریشهٔ دیگر است. اختلاف این دو مقدار a، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

۱) در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، حاصل‌ضرب ریشه‌ها به‌صورت $p = \frac{c}{a}$ است.

۲) اگر $x = a$ ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = ۰$ باشد، آن‌گاه $f(a) = ۰$ است.

$$\alpha = ۳\beta$$

از طرفی: $\alpha\beta = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۳\beta^۲ = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \beta^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \beta = \pm\frac{۲}{۳}$

$$\begin{cases} \beta = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳(\frac{۲}{۳})^۲ - a(\frac{۲}{۳}) + ۴ = ۰ \Rightarrow \frac{۴}{۳} - \frac{۲a}{۳} + ۴ = ۰ \Rightarrow a = ۸ \\ \beta = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳(\frac{-۲}{۳})^۲ - a(-\frac{۲}{۳}) + ۴ = ۰ \Rightarrow \frac{۴}{۳} + \frac{۲a}{۳} + ۴ = ۰ \Rightarrow a = -۸ \end{cases}$$

اختلاف دو مقدار a برابر ۱۶ است.

گروه آموزشی ماز

۳۶- معادله $\frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}} = \frac{\sqrt{x+۱}}{۳-\sqrt{x-۱}} - \frac{\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x-۱}+۳}$ چند ریشه مثبت دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

$$\frac{\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x-۱}+۳} - \frac{\sqrt{x+۱}}{۳-\sqrt{x-۱}} = \frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}}$$

$$\sqrt{x+۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{x-۱}+۳} - \frac{۱}{۳-\sqrt{x-۱}}\right) = \frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}}$$

$$\sqrt{x+۱}\left(\frac{(۳-\sqrt{x-۱}) - (\sqrt{x-۱}+۳)}{۹-(x-۱)}\right) = \frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}} \qquad \sqrt{x-۱}$$

$$\sqrt{x+۱}\left(\frac{-۲\cancel{\sqrt{x-۱}}}{-x+۱۰}\right) = \cancel{\sqrt{x-۱}} \xrightarrow{x\neq۱} \frac{-۲\sqrt{x+۱}}{۱۰-x} = ۱ \Rightarrow \underbrace{۲\sqrt{x+۱} = x-۱۰}_{(*)} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴(x+۱) = x^۲ - ۲۰x + ۱۰۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲۴x + ۹۶ = ۰ \xrightarrow{\Delta=۱۹۲} x_{۱,۲} = \frac{۲۴\pm\sqrt{۱۹۲}}{۲} = \frac{۲۴\pm۸\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲\pm۴\sqrt{۳}$$

طبق رابطهٔ (*) می‌توان فهمید که $x - ۱۰ > ۰$ است، یعنی $x > ۱۰$ است، لذا از بین جواب‌های به‌دست‌آمده $x = ۱۲ - ۴\sqrt{۳}$ غیر قابل قبول است. پس معادلهٔ داده شده فقط یک ریشهٔ مثبت دارد.

۳۷- سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB: y+۲x=۷$ ، $AC: ۴y-۳x=۱۷$ و $BC: ۲y-۷x=-۱۹$ هستند، طول ارتفاع BH کدام است؟

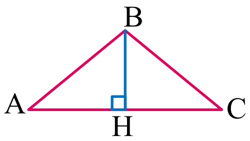
۱) ۴/۴ ۲) ۳ ۳) ۲/۵ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

۱) برای به‌دست آوردن محل برخورد دو خط، کافی است آن دو را در یک دستگاه حل کنیم.

۲) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید: $d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

فرض :



ابتدا مختصات نقطهٔ B را که همان تلاقی خطوط AB و BC است، پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} AB: y+۲x=۷ \\ BC=۲y-۷x=-۱۹ \end{cases} \Rightarrow x=۳, y=۱ \Rightarrow B(۳,۱)$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ $B(۳,۱)$ را از خط AC به معادلهٔ $۴y-۳x=۱۷$ پیدا می‌کنیم:

$$\begin{matrix} AC: ۴y-۳x-۱۷=۰ \\ B(۳,۱) \end{matrix} \Rightarrow BH=\frac{|۴(۱)-۳(۳)-۱۷|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{|۴-۹-۱۷|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{|-۲۲|}{۵}=\frac{۲۲}{۵}=\frac{۴۴}{۱۰}=۴/۴$$

گروه آموزشی ماز

۳۸- اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-(a^۲+b^۲-۱۲)x+a+b-۱=۰$ باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$:

جمع ریشه‌ها: $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

ضرب ریشه‌ها: $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$$x^۲-(a^۲+b^۲-۱۲)x+a+b-۱=۰$$

$$S=a+b=a^۲+b^۲-۱۲ \qquad (۱)$$

$$P=ab=a+b-۱ \quad (۲)$$

$$a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab \xrightarrow{(۱),(۲)} (a+b)=(a+b)^۲-۲ab-۱۲$$

$$(a+b)=(a+b)^۲-۲(a+b-۱)-۱۲ \xrightarrow{a+b=t} t=t^۲-۲(t-۱)-۱۲ \Rightarrow t^۲-۳t-۱۰=۰$$

$$(t-۵)(t+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۵ \\ t=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=۵ \checkmark \\ a+b=-۲ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۳۹- معادله $\frac{۲-x}{۵\sqrt{۲-x}}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۲-x}}-\frac{۱}{\sqrt{۲-x}+۲}$ چند ریشه مثبت دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

$$\frac{۱}{\sqrt{۲-x}+۲}-\frac{۱}{۲-\sqrt{۲-x}}=\frac{۲-x}{۵\sqrt{۲-x}}$$

$$\sqrt{2-x}=t \Rightarrow \frac{1}{t+2}-\frac{1}{2-t}=\frac{t^2}{5t} \Rightarrow \frac{-2\cancel{t}}{(t+2)(2-t)}=\frac{\cancel{t^2}}{5\cancel{t}} \Rightarrow -t^2+4=-10 \Rightarrow t^2=14$$

$$\Rightarrow 2-x=14 \Rightarrow x=-12$$

بنابراین معادله ریشهٔ مثبت ندارد.

گروه آموزشی ماز

۴۰- طول ارتفاع AH در مثلثی با رأس‌های $A(1,9)$ ، $B(3,3)$ و $C(7,11)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{10}$ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$m_{BC}=\frac{11-3}{7-3}=\frac{8}{4}=2$$

معادله BC: $y-3=2(x-3) \Rightarrow 2x-y-3=0$

$$AH=\frac{|2(1)-9-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

گروه آموزشی ماز

۴۱- ریشه‌های معادله $2x^2-ax+b=0$ نیم‌واحد از ریشه‌های معادله $2ax^2+ax-6=0$ بیشتر است. مقدار $\left[\frac{ab}{4}\right]$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ محاسباتی / ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:

در معادلهٔ درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ ، اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه خواهیم داشت:

$\bullet P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$ $\bullet S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

$$2ax^2+ax-6=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha\\ \beta\end{cases} \qquad 2x^2-ax+b=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\frac{1}{2}\\ \beta+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=-\frac{1}{2} \Rightarrow S'=\alpha+\beta+1=S+1=\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=1$$

$$P=\alpha\beta=\frac{-3}{a} \Rightarrow P'=\alpha\beta+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{1}{4}=-3-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=-3=\frac{b}{2} \Rightarrow b=-6$$

$$\left[\frac{ab}{4}\right]=\left[\frac{-3}{2}\right]=-2$$

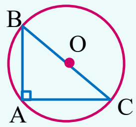
گروه آموزشی ماز

۴۲- خطوط $3y+x=-9$ و $ax-y=3$ ، یکدیگر را در نقطه A و خط $y-x=0$ را به‌ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC، مقدار $\tan(B-C)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ — (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:



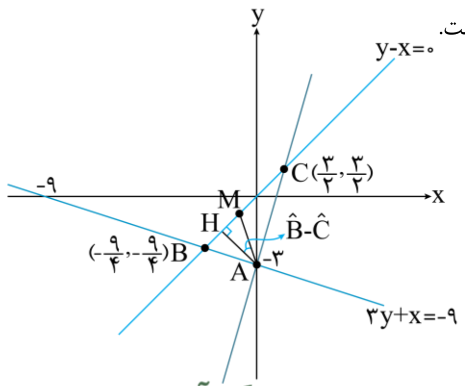
ـ دایره‌ای که از ۳ رأس مثلث می‌گذرد، دایرهٔ محیطی مثلث نامیده می‌شود.

ـ اگر مرکز دایرهٔ محیطی بر وسط یکی از اضلاع منطبق باشد، آن‌گاه آن مثلث، قائم‌الزاویه بوده و آن ضلع، وتر است.

مرکز دایرهٔ محیطی بر وسط یکی از اضلاع واقع است. (ضلع BC)، بنابراین زاویهٔ A قائمه است.

$$m_{AB}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow m_{AC}=۳\Rightarrow a=۳$$

$B-C$ زاویهٔ بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر است.



$$AH=\frac{|۰+۳|}{\sqrt{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}\qquad AM=\frac{BC}{۲}=\frac{۱۵}{۸}\sqrt{۲}$$

$$\cos(B-C)=\frac{AH}{AM}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow \tan(B-C)=\frac{۳}{۴}$$

گروه آموزشی ماز

۴۳- اگر $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-۴}=۴$ باشد، حاصل عبارت $۱-\sqrt{x-a}+\sqrt{x-۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{a}{۲}$ ۲) $\frac{a}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ — (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۳) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

دربارهٔ معادلات رادیکالی یادت باشه

اگر $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}$ (a و b اعداد معلوم) مقداری مشخص مثل k داشته باشد، برای محاسبهٔ مزدوج عبارت اولیه یعنی $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}$ آن را برابر A فرض می‌کنیم و با ضرب دو عبارت در هم و استفاده از اتحاد مزدوج، A را به‌دست می‌آوریم.

طبق فرض مسئله $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-۴}=۴$ است، حال اگر عبارت $\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۴}$ را برابر t فرض کنیم، داریم:

$$\underbrace{(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-۴})}_{۴}\underbrace{(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۴})}_{t}=۴t$$

$$(x-a)-(x-۴)=۴t\Rightarrow -a+۴=۴t\Rightarrow t=\frac{۴-a}{۴}$$

حال به سراغ خواستهٔ سؤال می‌رویم:

$$A=۱-\sqrt{x-a}+\sqrt{x-۴}=۱-\underbrace{(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۴})}_{t}=۱-t$$

$$A=۱-t\xrightarrow{t=\frac{۴-a}{۴}}A=۱-\frac{۴-a}{۴}=\frac{۴-۴+a}{۴}=\frac{a}{۴}$$

گروه آموزشی ماز

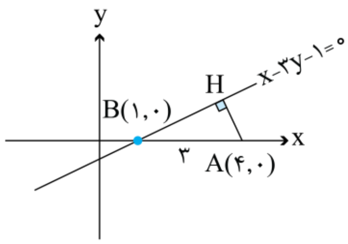
۴۴- نقطه $A(۴,۰)$ یک رأس مثلثی است که دو رأس دیگر آن روی خط $x-۳y=۱$ قرار دارد. اگر طول یک ضلع برابر فاصله رأس A از این خط بوده و نقطه $(\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۲})$ داخل این مثلث باشد، بیشترین مساحت چنین مثلثی در ناحیه اول محورهای مختصات کدام است؟

۱) $۰/۶\sqrt{۰/۶}$ ۲) $۰/۹\sqrt{۰/۹}$ ۳) $۱/۶۵$ ۴) $۱/۳۵$

پاسخ: گزینهٔ ۴ — (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

ابتدا خط $x-۳y-۱=۰$ را در دستگاه مختصات رسم کرده و نقطهٔ $A(۴,۰)$ را در این دستگاه مشخص می‌کنیم.

می‌دانیم که فاصلهٔ نقطهٔ $A(4,0)$ از خط $x-3y-1=0$ با طول یکی از اضلاع مثلث برابر است، پس:



$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4-0-1|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^2=AH^2+BH^2\Rightarrow(3)^2=(\frac{3}{\sqrt{10}})^2+BH^2\Rightarrow BH=\sqrt{9-\frac{9}{10}}=\sqrt{\frac{81}{10}}=\frac{9}{\sqrt{10}}$$

بنابراین مساحت مثلث ABH برابر است با:

$$S_{\overset{\triangle}{ABH}}=\frac{1}{2}\times AH\times BH=\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{9}{\sqrt{10}}=\frac{27}{20}=\frac{135}{100}=1/35$$

گروه آموزشی ماز

سؤالات کنکور: فصل ۲ یازدهم

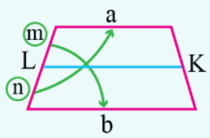
۴۵- در یک ذوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن ذوزنقه، کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{2}{5}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

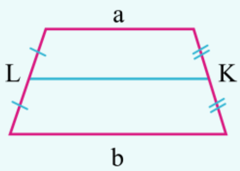
در یک ذوزنقه، اگر پاره‌خطی (LK) موازی دو قاعدهٔ آن رسم شود به طوری که نسبت به‌وجودآمده روی یک ساق (n,m) معلوم باشد، اندازهٔ این پاره‌خط برابر است با:

$$LK=\frac{mb+na}{m+n}$$



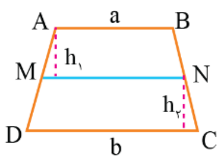
حالت خاص: اگر پاره‌خط رسم شده وسط دو ساق ذوزنقه را به هم وصل کند، اندازهٔ این پاره‌خط برابر میانگین طول قاعده‌ها است.

$$LK=\frac{a+b}{2}$$



می‌دانیم در یک ذوزنقه، اگر وسط دو ساق را به هم وصل کنیم، اندازه پاره‌خط ایجاد شده برابر میانگین طول قاعده‌ها است. پس:

$$MN=\frac{a+b}{2}$$



از آن‌جایی که مساحت ذوزنقه MNCD، ۲ برابر مساحت ذوزنقه ABNM است، بنابراین:

$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}}=\frac{\frac{1}{2}h_1(a+\frac{a+b}{2})}{\frac{1}{2}h_2(b+\frac{a+b}{2})}\xrightarrow{h_1=h_2}\frac{3a+b}{3b+a}=\frac{1}{2}$$

$$2(3a+b)=3b+a\Rightarrow 6a+2b=3b+a\Rightarrow 5a=b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{5}$$

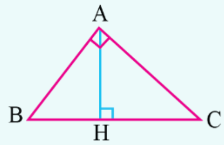
گروه آموزشی ماز

۴۶- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اضلاع قائم $AB=3\sqrt{5}$ و $AC=6$ و ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC، چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

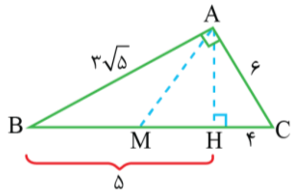
پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

در هر مثلث قائم‌الزاویه، اگر ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویه به‌وجودمی‌آید که هر دو با مثلث اصلی متشابه هستند و روابط طولی زیر بین آن‌ها برقرار است:



- $AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$
- $AH^۲ = BH.CH$
- $AB^۲ = BC.BH$
- $AH \times BC = AB \times AC$
- $AC^۲ = BC.CH$

ابتدا مثلث موردنظر را رسم کرده و سپس طبق قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ BC برابر است با:



$$BC^۲ = (۳\sqrt{۵})^۲ + ۶^۲ \Rightarrow BC = ۹$$

حال طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

$$AC^۲ = CH \times BC \Rightarrow ۳۶ = CH \times ۹ \Rightarrow CH = ۴$$

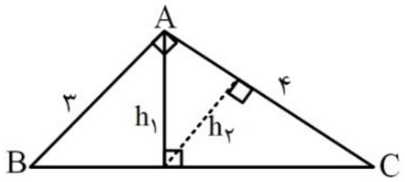
از طرفی چون AM میانه است، پس $BM = ۴/۵$ است و چون $CH = ۴$ و $BC = ۹$ است، بنابراین $MH = \frac{۱}{۲}$ است.

حال نسبت مساحت مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{AHM}$ برابر است با: (هر دو مثلث هم‌ارتفاع هستند.)

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{AHM}}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times BC \times AH}{\frac{۱}{۲} \times MH \times AH} = \frac{BC}{MH} = \frac{۹}{\frac{۱}{۲}} = ۱۸$$

گروه آموزشی ماز

۴۷- در شکل زیر، $h_۱$ و $h_۲$ ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند، نسبت $\frac{h_۲}{h_۱}$، کدام است؟

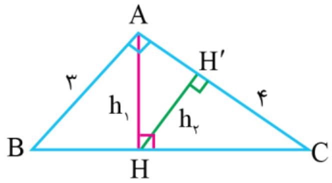


۱) $\frac{۳}{۵}$
۲) $\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

هرگاه دو مثلث متشابه باشند:

- نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها، برابر نسبت تشابه است.
- نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.



طبق قضیهٔ فیثاغورس، در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، $BC = ۵$ است.

از طرفی دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{AHC}$ به نسبت $\frac{۵}{۴}$ با هم متشابه‌اند.

بنابراین نسبت ارتفاع آن‌ها با نسبت تشابه آن‌ها برابر است، پس:

$$\frac{\text{ارتفاع } ABC}{\text{ارتفاع } AHC} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{h_۱}{h_۲} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{۴}{۵}$$

گروه آموزشی ماز

۴۸- در مثلث ABC، اضلاع $AB = ۴$ ، $AC = ۶$ و $BC = ۷$ است. از رأس C خطی موازی میانهٔ AM رسم شده و امتداد BA را در نقطهٔ D قطع کرده است. اندازهٔ BD کدام است؟

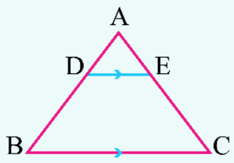
۱) $۷/۵$
۲) ۸
۳) $۸/۵$
۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

تعمیم قضیهٔ تالس:

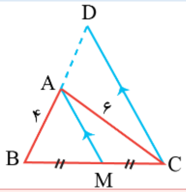
اگر پاره‌خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است. به‌عنوان مثال در شکل مقابل داریم:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



در مثلث $\overset{\triangle}{BDC}$، $AM \parallel DC$ است. حال طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{4}{BD} = \frac{\frac{BC}{2}}{BC} \Rightarrow BD = 8$$

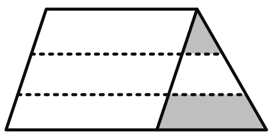


توجه:

چون AM میانهٔ وارد بر BC است. پس: $BM = \frac{BC}{2}$

گروه آموزشی ماز

۴۹- یک ساق ذوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره‌خط موازی یکدیگرند. نسبت مساحت دو ناحیهٔ سایه‌زده، کدام است؟



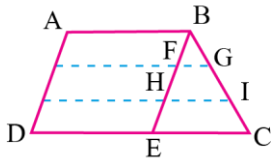
۱) $\frac{1}{6}$
۲) $\frac{1}{5}$
۳) $\frac{2}{9}$
۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

هرگاه دو مثلث متشابه باشند:

- نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها برابر نسبت تشابه است.
- نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

چون FG، HI و EC موازی هستند، بنابراین مثلث‌های $\overset{\triangle}{BFG}$ و $\overset{\triangle}{BHI}$ با مثلث $\overset{\triangle}{BEC}$ متشابه هستند. بنابراین:



$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BFG}}}{S_{\overset{\triangle}{BEC}}} = \left(\frac{BF}{BE}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BHI}}}{S_{\overset{\triangle}{BEC}}} = \left(\frac{BH}{BE}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{BFG}}}{S_{HECI}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{BFG}}}{(S_{\overset{\triangle}{BEC}}) - (S_{\overset{\triangle}{BHI}})} = \frac{\frac{1}{9}S_{\overset{\triangle}{BEC}}}{\frac{5}{9}S_{\overset{\triangle}{BEC}}} = \frac{1}{5}$$

گروه آموزشی ماز

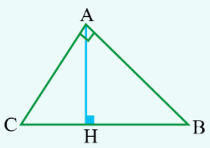
۵۰- در مستطیل ABCD، به طول $AB = 17$، از نقطهٔ A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر $BH = 15$ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چقدر بیشتر است؟

۱) $\frac{4}{15}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{7}{15}$
۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

در هر مثلث قائم‌الزاویه، اگر ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویه به‌وجودمی‌آید که هر دو با مثلث اصلی متشابه هستند و روابط طولی زیر بین آن‌ها برقرار است:

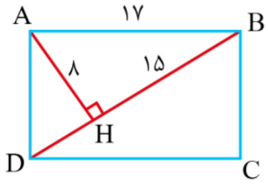
- $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- $AH^2 = BH.CH$
- $AB^2 = BC.BH$
- $AH \times BC = AB \times AC$
- $AC^2 = BC.CH$



ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{ABH}$، اندازهٔ ضلع AH برابر ۸ به‌دست می‌آید. حال طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ABD}$ داریم:

$$AB^{۲}=BH.BD\Rightarrow ۱۷^{۲}=۱۵\times BD\Rightarrow BD=\frac{۱۷^{۲}}{۱۵}$$

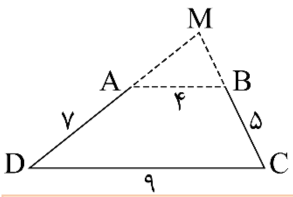
حال اختلاف قطر مستطیل (BD) از عدد ۱۹ برابر است با:



$$\Rightarrow BD-۱۹=\frac{۱۷^{۲}}{۱۵}-۱۹=\frac{۲۸۹-۲۸۵}{۱۵}=\frac{۴}{۱۵}$$

گروه آموزشی ماز

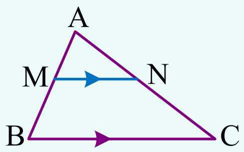
۵۱- اندازهٔ اضلاع ذوزنقه ABCD مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB، کدام است؟



۱) ۱۳/۲
۲) ۱۳/۶
۳) ۱۴/۴
۴) ۱۴/۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۹۹)

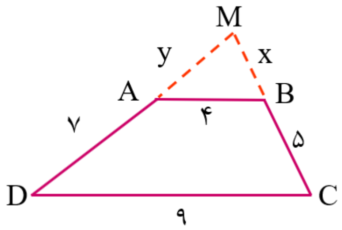
در شکل مقابل، $MN \parallel BC$ است. بنا به قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}\ \text{(جزء به کل)}$$

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\ \text{(جزء به جزء)}$$

بنا به تعمیم قضیهٔ تالس می‌توان نوشت:



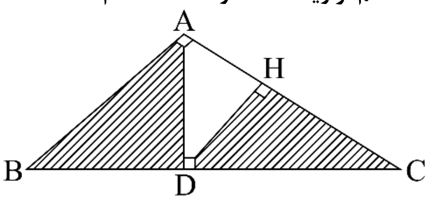
$$\frac{y}{y+۷}=\frac{x}{x+۵}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\begin{cases}۹y=۴y+۲۸\Rightarrow ۵y=۲۸\Rightarrow y=\frac{۲۸}{۵}\\ ۹x=۴x+۲۰\Rightarrow ۵x=۲۰\Rightarrow x=۴\end{cases}$$

بنابراین محیط مثلث $M\overset{\triangle}{A}B$ برابر است با:

$$x+y+۴\Rightarrow ۴+\frac{۲۸}{۵}+۴=۱۳/۶$$

گروه آموزشی ماز

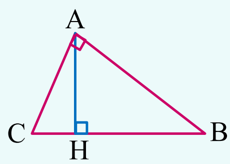
۵۲- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول اضلاع قائم $AB=\sqrt{۳}$ و $AC=۲$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HCD و ABD، کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۷}$
۲) $\frac{۴}{۷}$
۳) $\frac{۱۶}{۲۱}$
۴) $\frac{۸}{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۹۹)

ـ در هر مثلث قائم‌الزاویه، اگر ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویه به‌وجود می‌آید که هر دو با مثلث اصلی متشابه هستند و روابط طولی زیر بین آن‌ها برقرار است:



- $AB^{۲}+AC^{۲}=BC^{۲}$
- $AH^{۲}=BH.CH$
- $AB^{۲}=BC.BH$
- $AH\times BC=AB\times AC$
- $AC^{۲}=BC.CH$

ـ هرگاه دو مثلث متشابه باشند:

- نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها برابر نسبت تشابه است.
- نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

می‌دانیم اگر در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه ایجاده شده با هم متشابهند، پس:

$$\begin{cases} A\hat{B}D \sim A\hat{D}C \\ A\hat{D}C \sim H\hat{C}D \end{cases} \Rightarrow A\hat{B}D \sim H\hat{C}D$$

حال طبق روابط طولی در مثلث $A\hat{B}C$ داریم:

$$BC = \sqrt{AB^۲ + AC^۲} = \sqrt{۳+۴} = \sqrt{۷}$$

$$AC^۲ = CD \times BC \Rightarrow ۴ = CD \times \sqrt{۷} \Rightarrow CD = \frac{۴}{\sqrt{۷}}$$

بنابراین نسبت تشابه دو مثلث برابر است با:

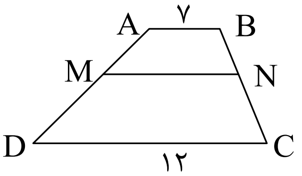
$$\Rightarrow \text{نسبت تشابه} = k = \frac{CD}{AB} = \frac{\frac{۴}{\sqrt{۷}}}{\sqrt{۳}} = \frac{۴}{\sqrt{۲۱}}$$

و در نهایت نسبت مساحت‌های خواسته‌شده برابر است با:

$$\Rightarrow \frac{S_{H\hat{C}D}}{S_{A\hat{B}D}} = \left(\frac{CD}{AB}\right)^۲ = \left(\frac{۴}{\sqrt{۲۱}}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۲۱}$$

گروه آموزشی ماز

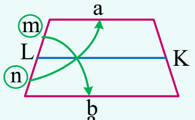
۵۳- در ذوزنقهٔ ABCD، پاره‌خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{۲}{۳}$ است. اندازهٔ MN، کدام است؟



۱) ۸
۲) ۸/۷۵
۳) ۹
۴) ۹/۵

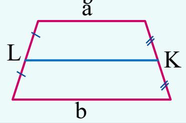
پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۹۹)

در یک ذوزنقه، اگر پاره‌خطی (LK) موازی دو قاعدهٔ آن رسم شود به‌طوری که نسبت به‌وجودآمده روی یک ساق (n, m) معلوم باشد، اندازهٔ این پاره‌خط برابر است با:



$$LK = \frac{mb + na}{m+n}$$

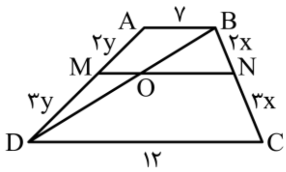
حالت خاص: اگر پاره‌خط رسم شده وسط دو ساق ذوزنقه را به هم وصل کند، اندازهٔ این پاره‌خط برابر میانگین طول قاعده‌ها است.



$$LK = \frac{a+b}{۲}$$

روش اول:

مطابق شکل مقابل، ابتدا قطر BD را رسم می‌کنیم:



$$MN \parallel AB \Rightarrow \text{تالس در ذوزنقه} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \begin{cases} NB = ۲x \\ NC = ۳x \end{cases}$$

$$MN \parallel AB \parallel DC : \begin{cases} \text{تالس در } B\hat{D}C : \frac{ON}{DC} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{ON}{۱۲} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow ON = \frac{۲۴}{۵} \\ \text{تالس در } A\hat{B}D : \frac{OM}{AB} = \frac{DM}{DA} \Rightarrow \frac{OM}{۷} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow OM = \frac{۲۱}{۵} \end{cases}$$

در نتیجه اندازهٔ MN برابر است با:

$$MN = OM + ON = \frac{۲۴}{۵} + \frac{۲۱}{۵} = \frac{۴۵}{۵} = ۹$$

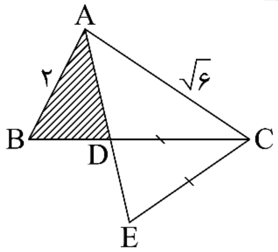
روش دوم:

مطابق نکته داریم:

$$MN = \frac{(۲y)(۱۲) + (۳y)(۷)}{۲y + ۳y} = \frac{۴۵y}{۵y} = ۹$$

گروه آموزشی ماز

۵۴- در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ A و $CE = CD$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACE، کدام است؟



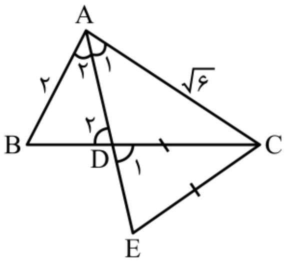
۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ — (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۹۹)

هرگاه دو مثلث متشابه باشند:

- نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها برابر نسبت تشابه است.
- نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

با توجه به شکل:



$$\begin{cases} CD = CE \Rightarrow \text{مثلث } C\overset{\triangle}{D}E \text{ متساوی‌الساقین} \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{E} \\ \hat{D}_۱ = \hat{D}_۲ \quad \text{(متقابل به رأس)} \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \quad \text{(AD نیمساز زاویهٔ A است.)} \end{cases} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}D \sim A\overset{\triangle}{C}E$$

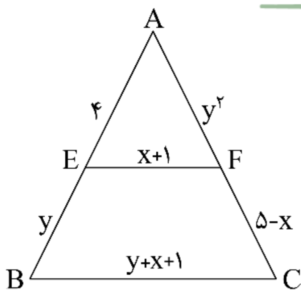
$$\text{نسبت تشابه} = k = \frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{۲}{\sqrt{۶}}$$

در نتیجه، نسبت مساحت‌های آن‌ها، مربع نسبت تشابه است، پس:

$$\frac{S_{A\overset{\triangle}{B}D}}{S_{A\overset{\triangle}{C}E}} = \left(\frac{۲}{\sqrt{۶}}\right)^۲ = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

گروه آموزشی ماز

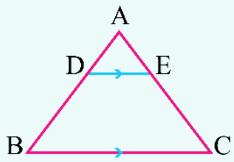
۵۵- در شکل زیر EF موازی BC است. مقدار $y - ۲x$، کدام است؟



۱) -۴
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ — (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

نکتهٔ ۱:

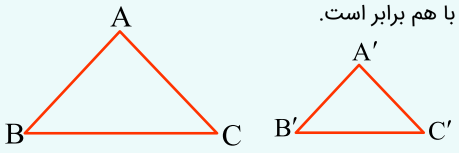


$$MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad \text{(جزء به کل)} \\ \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad \text{(جزء به جزء)} \end{cases}$$

نکتهٔ ۲:

هرگاه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند، آن‌گاه زوایای متناظر با هم برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر است.

$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}' \;,\; \hat{B}=\hat{B}' \;,\; \hat{C}=\hat{C}' \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}\end{cases}$$



حالت‌های تشابه

۱) هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند دو مثلث متشابه‌اند.

۲) هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها هم‌اندازه باشد، دو مثلث متشابهند.

۳) هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند دو مثلث متشابهند.

چون $BC \parallel EF$ است، پس:

$$\begin{cases}\hat{E}=\hat{B} \;,\; \hat{F}=\hat{C} \\ \hat{A}=\hat{A}\end{cases} \Rightarrow A\overset{\triangle}{E}F \sim A\overset{\triangle}{B}C$$

حال نسبت تشابه را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow$$ (اگر سؤال را از قضیهٔ تالس حل کنیم این همان جزء به کل است)

B

$$\frac{4}{y+4}=\frac{y^2}{y^2+(5-x)}=\frac{x+1}{y+x+1}$$

A

$$A:\frac{4}{y+4}=\frac{x+1}{y+x+1}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{4}{y}=\frac{x+1}{y}\Rightarrow x+1=4\Rightarrow x=3$$

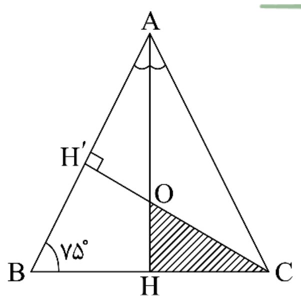
$$B:\frac{4}{y+4}=\frac{y^2}{y^2+(5-x)}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{4}{y}=\frac{y^2}{5-x}\xrightarrow{x=3}\frac{4}{y}=\frac{y^2}{2}\Rightarrow y^3=8\Rightarrow y=2$$

بنابراین مقدار $y-2x$ برابر است با:

$$\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}\Rightarrow y-2x=2-2(3)=2-6=-4$$

گروه آموزشی ماز

۵۶- در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC، کدام است؟



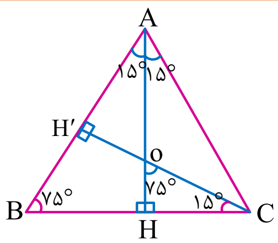
۱) $\dfrac{9}{2(7+4\sqrt{3})}$

۲) $\dfrac{6}{7+4\sqrt{3}}$

۳) $\dfrac{18}{7+4\sqrt{3}}$

۴) $\dfrac{9}{7+4\sqrt{3}}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۰)



چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس: $\hat{B}=\hat{C}=75^\circ$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A\overset{\triangle}{H}C$ چون $\hat{H}=90^\circ$ و $\hat{C}=75^\circ$ است، پس $\hat{A}=15^\circ$ است.

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC داریم:

$$\sin 15^\circ=\frac{CH}{AC}\xrightarrow{AC=6}CH=6\sin 15^\circ$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHC مساحت برابر است با:

$$S_{O\overset{\triangle}{H}C}=\frac{1}{2}\times CH\times OH=\frac{1}{2}\times(6\sin 15^\circ)(6\sin 15^\circ\tan 15^\circ)$$

$$S_{O\hat{H}C}=18\frac{\sin^3 15^\circ}{\cos 15^\circ}$$

حال به کمک رابطه‌های طلایی $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ و $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ داریم:

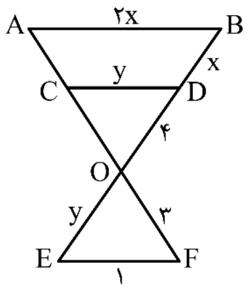
$$\begin{cases}\sin^2 15^\circ=\dfrac{1-\cos 30^\circ}{2}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\xrightarrow{\sin 15^\circ>0}\sin 15^\circ=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\\[2ex] \cos^2 15^\circ=\dfrac{1+\cos 30^\circ}{2}=\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\xrightarrow{\cos 15^\circ>0}\cos 15^\circ=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\end{cases}$$

$$S_{O\hat{H}C}=18\frac{\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^3}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}=18\times\frac{\frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}}{8}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}=\frac{9}{2}\times\frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$S_{O\hat{H}C}=\frac{9}{2}\times(2-\sqrt{3})\times\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=\frac{9}{2}\times(2-\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})=\frac{9}{2}(7-4\sqrt{3})=\frac{9}{2(7+4\sqrt{3})}$$

گروه آموزشی ماز

۵۷- در شکل زیر، **AB**، **CD** و **EF** موازی‌اند. طول پاره‌خط **AC**، کدام است؟



۱) $\frac{3}{4}$

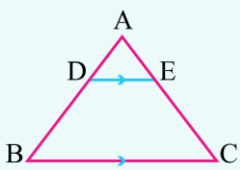
۲) $\frac{4}{3}$

۳) ۲

۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ — (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

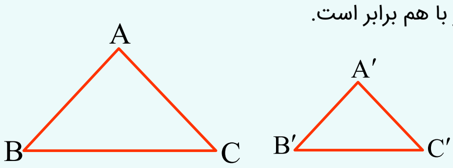
نکتهٔ ۱:



$$MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC} & \text{(جزء به کل)}\\[2ex] \dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{NC} & \text{(جزء به جزء)}\end{cases}$$

نکتهٔ ۲:

هرگاه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند، آن‌گاه زوایای متناظر با هم برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر است.



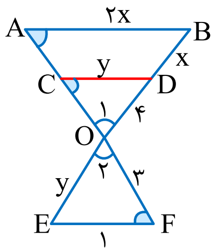
$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}'\ ,\ \hat{B}=\hat{B}'\ ,\ \hat{C}=\hat{C}'\\[1ex] \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}\end{cases}$$

حالت‌های تشابه

۱) هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

۲) هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها هم‌اندازه باشد، دو مثلث متشابهند.

۳) هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابهند.



$$\begin{cases} CD \parallel EF \Rightarrow \hat{C}=\hat{F} \\ \hat{O}_1=\hat{O}_1 \text{ متقابل به رأس} \end{cases} \Rightarrow O\hat{E}F \sim O\hat{C}D$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{OD}{OE}=\dfrac{CD}{EF} \Rightarrow \dfrac{۴}{y}=\dfrac{y}{۱} \Rightarrow y^۲=۴ \Rightarrow y=۲ \\ \dfrac{OC}{OF}=\dfrac{CD}{EF} \Rightarrow \dfrac{OC}{۳}=\dfrac{۲}{۱} \Rightarrow OC=۶ \end{cases}$$

از طرفی:

$$\begin{cases} \hat{O}_1=\hat{O}_۲ \\ CD \parallel AB \Rightarrow \hat{C}=\hat{A} \end{cases} \Rightarrow O\hat{C}D \sim O\hat{A}B$$

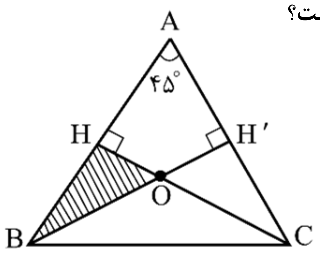
$$\frac{CD}{AB}=\frac{OD}{OB} \Rightarrow \frac{y}{۲x}=\frac{۴}{۴+x} \xrightarrow{y=۲} \frac{۲}{۲x}=\frac{۴}{۴+x} \Rightarrow ۸x=۸+۲x \Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$$

حال مطابق قضیهٔ تالس (جزء به جزء) در مثلث OAB داریم:

$$\frac{OD}{DB}=\frac{OC}{CA} \xrightarrow[DB=\frac{۴}{۳}]{OC=۶} \frac{۴}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۶}{CA} \Rightarrow CA=\frac{۸}{۴}=۲$$

گروه آموزشی ماز

۵۸- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AB برابر ۸ واحد است. مساحت مثلث OHB، کدام است؟



۱) $\dfrac{۶}{۲+\sqrt{۳}}$ ۲) $\dfrac{۸}{۲+\sqrt{۳}}$

۳) $\dfrac{۱۲}{۳+۲\sqrt{۲}}$ ۴) $\dfrac{۱۶}{۳+۲\sqrt{۲}}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

با توجه به شکل زیر، چون ABC متساوی‌الساقین است، پس $AB=AC=۸$ است.

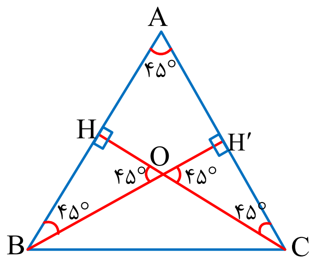
از طرفی مثلث AHC قائم‌الزاویه است و چون $\hat{A}=۴۵°$ است، پس: $\hat{C}=۴۵°$

$$\sin\hat{C}=\frac{AH}{AC} \Rightarrow \sin ۴۵°=\frac{AH}{۸} \Rightarrow AH=۴\sqrt{۲}$$

و به‌طریق مشابه در مثلث AH′B نیز می‌توان به این نتیجه رسید که $AH'=۴\sqrt{۲}$ و چون $AB=AC=۸$ است، پس:

$$BH=CH'=۸-۴\sqrt{۲}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB، چون $\hat{B}=۴۵°$ است، پس $B\hat{O}H=۴۵°$ بوده و مثلث OHB یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، لذا $OH=BH$ است و چون می‌دانیم که $BH=۸-۴\sqrt{۲}$ است، پس $OH=۸-۴\sqrt{۲}$ در نتیجه مساحت مثلث OHB برابر است با:



$$S_{O\hat{H}B}=\frac{1}{۲}\times OH\times BH=\frac{1}{۲}\times(۸-۴\sqrt{۲})(۸-۴\sqrt{۲})$$

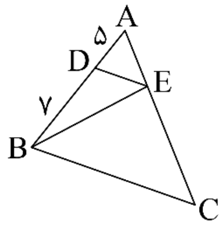
$$S_{O\hat{H}B}=\frac{(۸-۴\sqrt{۲})^۲}{۲}=\frac{۶۴-۶۴\sqrt{۲}+۳۲}{۲}=\frac{۹۶-۶۴\sqrt{۲}}{۲}=۴۸-۳۲\sqrt{۲}=۱۶(۳-۲\sqrt{۲})$$

چرا جواب در گزینه‌ها نیست؟! (بیاین جواب به‌دست‌اومده رو کمی میکاپ کنیم.)

$$۱۶(۳-۲\sqrt{۲})\times\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۳+۲\sqrt{۲}}=\frac{۱۶(۹-۸)}{۳+۲\sqrt{۲}}=\frac{۱۶}{۳+۲\sqrt{۲}}$$

گروه آموزشی ماز

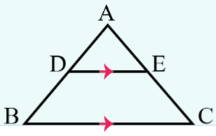
۵۹- در مثلث **ABC**، ضلع **BC** موازی ضلع **DE** است. مساحت مثلث **BCE**، چند برابر مساحت مثلث **BDE** است؟

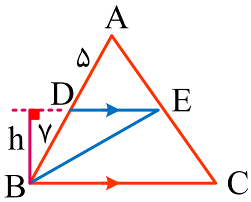


۱) ۱/۵
۲) ۱/۷
۳) ۲/۱
۴) ۲/۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ — (ساده ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

در مثلث ABC به شکل مقابل داریم: $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ اگر



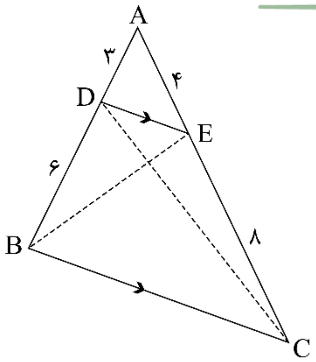


$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{5}{12} \Rightarrow \begin{cases} DE=5x \\ BC=12x \end{cases}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BCE}}}{S_{\overset{\triangle}{BDE}}}=\frac{\frac{1}{2}\times BC\times h}{\frac{1}{2}\times DE\times h}=\frac{BC}{DE}=\frac{12x}{5x}=\frac{12}{5}=\frac{24}{10}=2/4$$

گروه آموزشی ماز

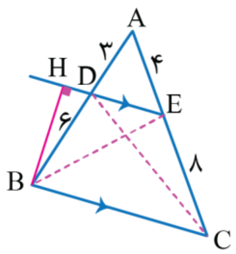
۶۰- در شکل زیر، نسبت مساحت مثلث **CDE** به مساحت مثلث **BDE** کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴ — (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

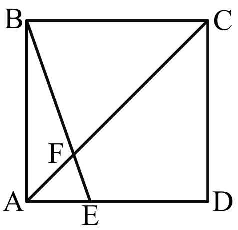
ارتفاع BH را رسم کرده و داریم:



$$\frac{S_{CDE}}{S_{BDE}}=\frac{\frac{1}{2}\times DE\times BH}{\frac{1}{2}\times DE\times BH}=1$$

گروه آموزشی ماز

۶۱- در مربع شکل زیر، اندازه **ED** دو برابر **AE** است. طول **EF** چند برابر **AF** است؟



۱) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{10}}{3}$
۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ — (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

حالت‌های تشابه ۲ مثلث:

حالت ۱) هرگاه ۲ زاویه از مثلثی با ۲ زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، ۲ مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{A}=\hat{A}' , \hat{B}=\hat{B}') \Leftrightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

حالت ۲) هرگاه اندازه‌های ۲ ضلع از مثلثی با اندازه‌های ۲ ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها برابر باشند، ۲ مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}\ ,\ \hat{A}=\hat{A}'\right)\Leftrightarrow A\overset{\triangle}{B}C\sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

حالت ۳) هرگاه اندازه‌های ۳ ضلع از مثلثی با اندازه‌های ۳ ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

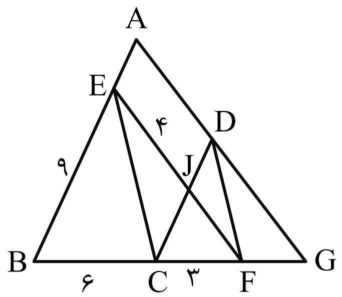
$$\left(\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\right)\Leftrightarrow A\overset{\triangle}{B}C\sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

ضلع مربع را ۳ در نظر می‌گیریم. (تناسب اولیه اهمیتی ندارد.)

$$AE=\frac{۱}{۳}BC\Rightarrow\begin{cases}EF=\frac{۱}{۳}BF\\ AF=\frac{۱}{۳}CF\end{cases}\Rightarrow\frac{EF}{AF}=\frac{BE}{AC}=\frac{\sqrt{۱+۹}}{\sqrt{۹+۹}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۸}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

گروه آموزشی ماز

۶۲- در شکل زیر، $AB \| CD$ و $EC \| DF$ است. اندازه DF چقدر است؟



۱) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۴}$

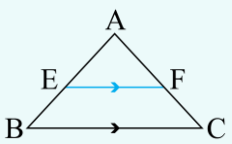
۲) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳۳}}{۴}$

۴) $\frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

قضیه تالس:



$$EF \| BC \Leftrightarrow \frac{AE}{BE}=\frac{AF}{FC}$$

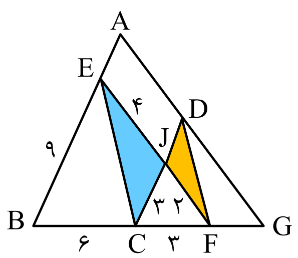
تعمیم قضیه تالس:

$$EF \| BC \Leftrightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$

می‌دانیم که $AB \| CD$ است، پس در مثلث FEB به کمک قضیهٔ تالس داریم:

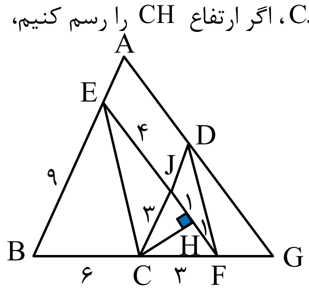
$$CJ \| BE \Rightarrow \begin{cases}\text{جزء به جزء: } \frac{FC}{CB}=\frac{FJ}{JE}\Rightarrow\frac{۳}{۶}=\frac{FJ}{۴}\Rightarrow FJ=۲\\ \text{جزء به کل: } \frac{FC}{FB}=\frac{CJ}{BE}\Rightarrow\frac{۳}{۹}=\frac{CJ}{۹}\Rightarrow CJ=۳\end{cases}$$

حال، با توجه به شکل زیر می‌توان گفت که دو مثلث DJF و EJC باهم متشابه‌اند، پس:



$$\overset{\triangle}{DJF}\sim\overset{\triangle}{EJC}\Rightarrow\frac{DF}{CE}=\frac{FJ}{EJ}\Rightarrow\frac{DF}{EC}=\frac{۲}{۴}\Rightarrow DF=\frac{CE}{۲}\quad(*)$$

از طرفی می‌دانیم که در یک مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، میانه نیز می‌باشد لذا در مثلث متساوی‌الساقین CJF، اگر ارتفاع CH را رسم کنیم، داریم: $JH=HF=۱$



$$\overset{\triangle}{CJH}:(CH)^۲+(JH)^۲=(CJ)^۲\Rightarrow CH=\sqrt{۹-۱}=\sqrt{۸}$$

$$\overset{\triangle}{CEH}:(CE)^۲=(EH)^۲+(CH)^۲\Rightarrow CE=\sqrt{۲۵+۸}=\sqrt{۳۳}$$

طبق رابطهٔ (*) می‌دانیم که $DF = \frac{CE}{۲}$، پس:

$$DF = \frac{CE}{۲} = \frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۶۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC فاصله پای ارتفاع وارد بر وتر تا رأس C برابر ۹ است. اگر طول وتر ۲۴ باشد، نسبت طول اضلاع قائمه کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$

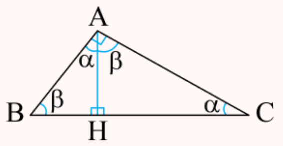
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

$$\overset{\Delta}{AHB} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow AH^{۲} = BH \times HC$$

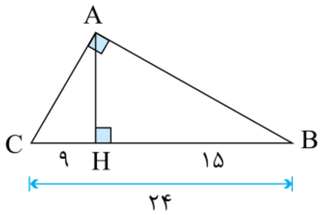
$$\overset{\Delta}{AHB} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow AB^{۲} = BH \times BC$$

$$\overset{\Delta}{AHC} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow AC^{۲} = CH \times BC$$



می‌دانیم که $CH = ۹$ و $BC = ۲۴$ است، پس: $BH = ۱۵$

از طرفی، به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



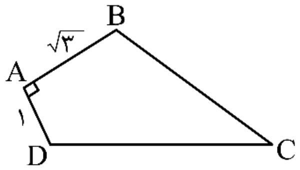
$$\begin{cases} AB^{۲} = BH \times BC = ۱۵ \times ۲۴ \\ AC^{۲} = CH \times BC = ۹ \times ۲۴ \end{cases}$$

در نتیجه نسبت طول اضلاع قائمه برابر است با:

$$\frac{AB^{۲}}{AC^{۲}} = \frac{۱۵ \times ۲۴}{۹ \times ۲۴} = \frac{۱۵}{۹} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{۱۵}{۹}} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۳}$$

گروه آموزشی ماز

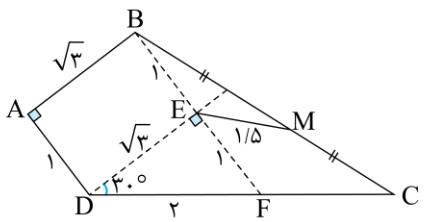
۶۴- در شکل زیر، از نقاط B و D به‌ترتیب دو پاره‌خط موازی اضلاع AD و AB چنان رسم می‌کنیم که یکدیگر را در نقطه E درون چهارضلعی قطع کنند. اگر $C\hat{D}E = ۳۰^\circ$ و فاصله نقطه E تا وسط ضلع BC برابر ۱/۵ باشد، طول ضلع DC کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

در چهارضلعی ABED داریم:



$$\begin{cases} BE \parallel AD \\ AB \parallel DE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BE = AD = ۱ \\ DE = AB = \sqrt{۳} \\ B\hat{E}D = ۹۰^\circ \end{cases}$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه DEF داریم:

$$\begin{cases} \tan ۳۰^\circ = \frac{EF}{DE} \Rightarrow EF = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times \sqrt{۳} = ۱ \\ \sin ۳۰^\circ = \frac{EF}{DF} \Rightarrow DF = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲ \end{cases}$$

دو مثلث BEM و BFC بنا به حالت (ض‌زض) با هم متشابه هستند، پس:

$$\begin{cases}\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{BE}{BF}=\dfrac{۱}{۲}\\ E\hat{B}M=E\hat{B}M\end{cases}\Rightarrow \overset{\triangle}{BEM}\sim\overset{\triangle}{BFC}\Rightarrow\dfrac{EM}{FC}=\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow\dfrac{۱/۵}{FC}=\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow FC=۳$$

بنابراین طول ضلع DC برابر $DC=DF+FC=۲+۳=۵$ بوده و گزینهٔ ۳ صحیح است.

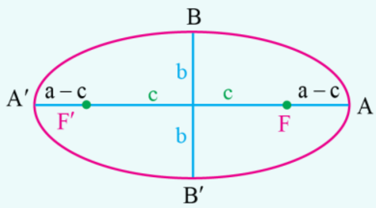
سؤالات کنکور: فصل ۶ دوازدهم

۶۵- در یک بیضی به کانون‌های $(۲,-۱)$ و $(۲,۷)$، اندازهٔ قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟

۱) $۰/۶$ ۲) $۰/۶۴$ ۳) $۰/۷۵$ ۴) $۰/۸$

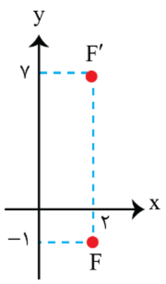
پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۶) (کنکور داخل ۹۸)

در بیضی شکل زیر داریم:



- $a^۲=b^۲+c^۲$
- $\text{خروج از مرکز}=e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{۱-(\dfrac{b}{a})^۲}$
- $\text{قطر بزرگ}=AA'=۲a$
- $\text{قطر کوچک}=BB'=۲b$
- $\text{فاصلهٔ دو کانون}=FF'=۲c$

چون $F(۲,-۱)$ و $F'(۲,۷)$ است، بنابراین مطابق شکل زیر، فاصلهٔ دو کانون برابر ۸ است، پس:



$FF'=۸\Rightarrow ۲c=۸\Rightarrow c=۴$

قطر کوچک: $۲b=۶\Rightarrow b=۳$

$a^۲=b^۲+c^۲=۳^۲+۴^۲=۲۵\Rightarrow a=۵$

$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{۴}{۵}=۰/۸$

گروه آموزشی ماز

۶۶- نقطهٔ $A(-۱,۴)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $۲x-۳y+۱=۰$ وتری به طول $۲\sqrt{۷}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y=۲$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) -۵ و ۳ ۲) -۴ و ۲ ۳) $-۱\pm\sqrt{۲}$ ۴) $-۱\pm\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۲۰۶) (کنکور خارج ۹۸)

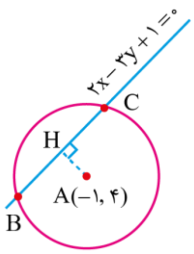
ـ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$AH=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

ـ اگر نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ مرکز و R شعاع یک دایره باشد، فرم استاندارد دایره برابر است با:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$$

ابتدا فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۱,۴)$ را از خط $۲x-۳y+۱=۰$ پیدا می‌کنیم:



$$AH=\frac{|۲(-۱)-۳(۴)+۱|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

می‌دانیم که طول وتر BC برابر $۲\sqrt{۷}$ است، پس طول BH برابر $\sqrt{۷}$ است. لذا در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ABH}$ طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AH^۲+BH^۲=AB^۲\Rightarrow ۱۳+۷=AB^۲\Rightarrow AB=R=\sqrt{۲۰}$$

حال با داشتن شعاع دایره و مختصات مرکز دایره، معادلهٔ دایره برابر است با:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x+1)^2+(y-4)^2=20$$

در نهایت برای پیدا کردن طول نقطهٔ تلاقی دایره و خط $y=2$، در معادلهٔ دایره به جای y، ۲ قرار می‌دهیم:

$$(x+1)^2+(2-4)^2=20 \Rightarrow (x+1)^2=16 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-5 \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۶۷- دایره‌های $x^2+y^2+2y=3$ و $x^2+y^2+2x=3$ متقاطع‌اند. معادلهٔ وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟

۱) $x=y$
۲) $x=1+y$
۳) $x=-y$
۴) $x=1-y$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۶) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

اگر دو دایرهٔ C_1 و C_2 متقاطع باشند، برای یافتن معادلهٔ وتر مشترک، معادلهٔ دو دایره را از هم کم می‌کنیم: $C_2-C_1=0$

با توجه به نکته، معادلهٔ دو دایره را از هم کم می‌کنیم:

$$(x^2+y^2+2x-3)-(x^2+y^2+2y-3)=0$$
$$\Rightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2x-\cancel{3}-\cancel{x^2}-\cancel{y^2}-2y+\cancel{3}=0 \Rightarrow 2x-2y=0 \Rightarrow 2(x-y)=0$$
$$\Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$$

گروه آموزشی ماز

۶۸- دایرهٔ $x^2+y^2+2y=3$ مفروض است. معادلهٔ دایره‌ای که با دایرهٔ قبلی مماس داخل بوده و از نقطهٔ $(0,-3)$ گذشته و شعاع آن با قطر دایرهٔ اصلی برابر باشد، کدام است؟

۱) $x^2+y^2+2y+15=0$
۲) $x^2+y^2-2y=15$
۳) $x^2+y^2-2x-2y=0$
۴) $x^2+y^2+4y+3=0$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۶) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

نکتهٔ ۱:

برای پیدا کردن مختصات مرکز دایره و نیز شعاع دایره به کمک فرم گستردهٔ دایره یعنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ داریم:

مرکز دایره : $O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$

شعاع دایره : $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

نکتهٔ ۲:

اگر دو دایره به مراکز O و O' به‌ترتیب با شعاع‌های r و r' مماس داخل باشند:

$$OO'=|r-r'|$$

در دایرهٔ $x^2+y^2+2y=3$، مرکز و شعاع دایره برابر است با:

$$\begin{cases} \text{مرکز دایره}: O(0,-1) \\ \text{شعاع دایره}: r=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+(2)^2-4(-3)}=\frac{1}{2}\times 4=2 \end{cases}$$

طبق اطلاعات سؤال، شعاع دایرهٔ دوم با قطر دایرهٔ اصلی برابر است، لذا:

$$\begin{cases} \text{مرکز دایره}: O'(\alpha,\beta) \\ \text{شعاع دایرهٔ}: r'=2r=2\times 2=4 \end{cases} \Rightarrow \text{معادلهٔ دایرهٔ دوم}: (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=16 \quad (*)$$

می‌دانیم که دایرهٔ دوم از نقطهٔ $(0,-3)$ عبور می‌کند، پس:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=16 \xrightarrow{(0,-3)} \alpha^2+(-3-\beta)^2=16 \Rightarrow \alpha^2+(\beta+3)^2=16 \quad (A)$$

و چون هر دو دایره، مماس داخل هستند، بنابراین باید $OO'=|r-r'|$ باشد، پس:

$$OO'=\sqrt{(\alpha-۰)^۲+(\beta+۱)^۲}\Rightarrow\sqrt{\alpha^۲+(\beta+۱)^۲}=|۲-۴|=۲\Rightarrow\alpha^۲+(\beta+۱)^۲=۴\quad(B)$$

$$\xrightarrow{A,B}\begin{cases}\alpha^۲+(\beta+۳)^۲=۱۶\\ \alpha^۲+(\beta+۱)^۲=۴\end{cases}\xrightarrow{(-۱)}(\beta+۳)^۲-(\beta+۱)^۲=۱۲$$

$$\Rightarrow(\beta^۲+۶\beta+۹)-(\beta^۲+۲\beta+۱)=۱۲\Rightarrow۴\beta-۴=۰\Rightarrow\beta=۱$$

حال $\beta=۱$ را در یکی از روابط A یا B قرار داده و α را می‌یابیم:

$$\alpha^۲+(\beta+۱)^۲=۴\xrightarrow{\beta=۱}\alpha^۲+۴=۴\Rightarrow\alpha=۰$$

حال $\alpha=۰$ و $\beta=۱$ را در رابطهٔ $(*)$ جای‌گذاری کرده و معادلهٔ دایرهٔ دوم را می‌یابیم:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=۱۶\xrightarrow[\beta=۱]{\alpha=۰}(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=۱۶\Rightarrow x^۲+y^۲-۲y=۱۵$$

گروه آموزشی ماز

۶۹- نقطه $(-۱۲,۰)$ یکی از کانون‌های یک بیضی است که طول قطر کوچک آن برابر ۱۸ است. اگر مبدأ مختصات مرکز بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی، چقدر است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۸ ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۸

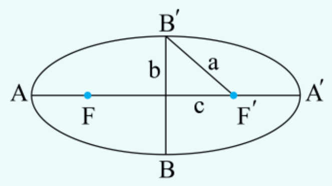
پاسخ: گزینهٔ ۲ — (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۶) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

) در یک بیضی فاصلهٔ هر کانون تا مرکز بیضی برابر c است.

۲) طول قطر بزرگ برابر $۲a$، قطر کوچک $۲b$ و فاصلهٔ کانونی برابر $۲c$ است.

۳) در هر بیضی رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ برقرار است.

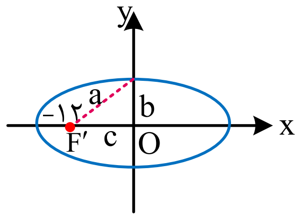
۴) خروج از مرکز بیضی برابر $e=\frac{c}{a}=\sqrt{۱-\left(\frac{b}{a}\right)^۲}$ است.



$$\begin{cases}c=۱۲\\ \text{قطرکوچک}=۲b=۱۸\to b=۹\end{cases}$$

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow a^۲=۸۱+۱۴۴\Rightarrow a^۲=۲۲۵\Rightarrow a=۱۵$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۱۲}{۱۵}=\frac{۴}{۵}=\frac{۸}{۱۰}=۰/۸$$



توجه کنید که خروج از مرکز بیضی همواره عددی بین صفر و یک است، پس همون اول کار گزینه‌های ۳ و ۴ رو رد می‌کنیم.

گروه آموزشی ماز

۷۰- دو دایره $x^۲+y^۲+۲y-۴x=۰$ و $x^۲+y^۲-۲y=۲$، نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟

۱) مماس بیرون ۲) متقاطع ۳) متخارج ۴) متداخل

پاسخ: گزینهٔ ۲ — (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۶) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

ـ دو دایره به شعاع‌های R و R' و مرکزهای O و O': $|R-R'|<OO'<R+R'\longrightarrow$ متقاطع هستند

ـ در دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ داریم: $O\left(-\frac{a}{۲},\frac{-b}{۲}\right)\ ,\ R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

ابتدا مرکز و شعاع دایره‌ها را می‌یابیم:

$$\begin{cases}x^۲+y^۲+۲y-۴x=۰\Rightarrow\begin{cases}O=(۲,-۱)\\ R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۴-۰}=\sqrt{۵}\end{cases}\\ x^۲+y^۲-۲y=۲\Rightarrow\begin{cases}O'=(۰,-۱)\\ R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰+۴+۸}=\sqrt{۳}\end{cases}\end{cases}$$

و $O'O=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ پس داریم: $|R-R'|<O'O<R+R' \Leftarrow$ متقاطع هستند.

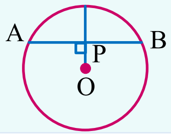
گروه آموزشی ماز

۷۱- طول کوتاه‌ترین وتری که از $(-1,2/5)$ در دایره $2x^2+2y^2-6x-10y+1=0$ رسم می‌شود، کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{7}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

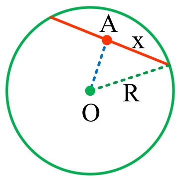
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۶) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:



کوتاه‌ترین وتری که از P می‌گذرد، وتری است که بر شعاع گذرنده از P عمود است.

تبصره: این شعاع رسم شده، وتر را به ۲ قسمت برابر تقسیم می‌کند، یعنی $AP=BP$.



$\xrightarrow{A(-1,\frac{5}{2})} 2+\frac{25}{2}+6-25+1<0 \Rightarrow$ نقطه داخل دایره

$O(\frac{3}{2},\frac{5}{2})\Rightarrow OA=\sqrt{(\frac{5}{2})^2}=\frac{5}{2}$

$R=\frac{1}{2}\sqrt{9+25-2}=2\sqrt{2}$

$x^2=R^2-OA^2=8-\frac{25}{4}=\frac{7}{4}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{7}}{2}\Rightarrow 2x=\sqrt{7}$

گروه آموزشی ماز

۷۲- نقطه $(0,a)$ و مبدأ مختصات، کانون‌های یک بیضی بوده و $(-3,0)$ یک نقطه واقع بر آن است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، طول قطر کوچک بیضی کدام است؟

۱) $6\sqrt{6}$ ۲) $6\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{6}$ ۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۶) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

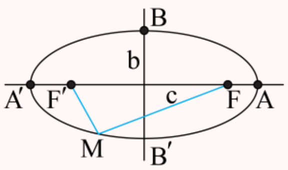
بیضی

مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل هر نقطه روی آن از ۲ نقطهٔ ثابت به نام کانون‌ها، مقداری ثابت معادل قطر بزرگ $(2a)$ باشد.

یعنی $MF+MF'=2a$

خروج از مرکز $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

$\left.\begin{array}{l}\text{قطر بزرگ}=A'A=2a\\ \text{قطر کوچک}=B'B=2b\\ \text{فاصلهٔ کانونی}=F'F=2c\end{array}\right\}\Rightarrow a^2=b^2+c^2$



$a=$ فاصلهٔ کانون تا هر رأس ناکانونی $\quad a+c=$ فاصلهٔ کانون تا دورترین رأس کانونی $\quad a-c=$ فاصلهٔ کانون تا نزدیک‌ترین رأس کانونی

روش اول:

می‌دانیم که نقطهٔ $F(0,a)$ و مبدأ مختصات $(F'(0,0))$ کانون‌های بیضی هستند، در نتیجه:

$FF'=|a|\Rightarrow 2c=|a|\Rightarrow c=\frac{|a|}{2}$

از طرفی، نقطهٔ $A(-3,0)$ واقع بر بیضی است، پس:

$AF+AF'=2a'\Rightarrow\sqrt{(-3-0)^2+(0-a)^2}+\sqrt{(-3-0)^2+0^2}=2a'$

$\Rightarrow\sqrt{9+a^2}+\sqrt{9}=2a'\Rightarrow\sqrt{9+a^2}+3=2a'\Rightarrow a'=\frac{\sqrt{9+a^2}+3}{2}$

می‌دانیم خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است، پس:

$$e=\frac{c}{a'}=\frac{\frac{|a|}{۲}}{\frac{\sqrt{۹+a^۲}+۳}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{|a|}{\sqrt{۹+a^۲}+۳}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{۹+a^۲}+۳=\sqrt{۲}|a|\Rightarrow\sqrt{۹+a^۲}=\sqrt{۲}|a|-۳$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}۹+a^۲=۲a^۲-۶\sqrt{۲}|a|+۹\Rightarrow a^۲-۶\sqrt{۲}|a|=۰$$

$$\Rightarrow|a|^۲-۶\sqrt{۲}|a|=۰\Rightarrow|a|(|a|-۶\sqrt{۲})=۰\Rightarrow\begin{cases}|a|=۰\Rightarrow a=۰\ \text{غ ق ق}\\|a|-۶\sqrt{۲}=۰\Rightarrow|a|=۶\sqrt{۲}\Rightarrow a=\pm۶\sqrt{۲}\end{cases}$$

می‌دانیم که $c=\frac{|a|}{۲}$ و $a'=\frac{\sqrt{۹+a^۲}+۳}{۲}$ است، پس:

$$c=\frac{|a|}{۲}=\frac{۶\sqrt{۲}}{۲}=۳\sqrt{۲}$$

$$a'=\frac{\sqrt{۹+a^۲}+۳}{۲}=\frac{\sqrt{۹+۷۲}+۳}{۲}=\frac{۹+۳}{۲}=۶$$

$$a'^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow b=\sqrt{a'^۲-c^۲}=\sqrt{(۶)^۲-(۳\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۳۶-۱۸}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

$$\text{طول قطر کوچک}=۲b=۲(۳\sqrt{۲})=۶\sqrt{۲}$$

روش دوم:

می‌دانیم وتری که از کانون بیضی می‌گذرد و بر محور کانونی عمود است، وتر کانونی بیضی نام دارد و اندازهٔ آن برابر $\frac{۲b^۲}{a}$ است. از طرفی، با توجه به اینکه یکی از کانون‌های بیضی $F(۰,۰)$ و نقطهٔ روی بیضی $A(-۳,۰)$، هم عرض هستند، می‌توان گفت که AF با نصف وتر کانونی برابر است، پس:

$$AF=\frac{b^۲}{a'}\Rightarrow\frac{b^۲}{a'}=۳\Rightarrow b^۲=۳a'$$

از طرفی، خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است، پس:

$$e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a'^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\xrightarrow{b^۲=۳a'}۱-\frac{۳a'}{a'^۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۳a'}{(a')^۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow(a')^۲=۶a'\Rightarrow(a')^۲-۶a'=۰\Rightarrow a'(a'-۶)=۰\Rightarrow\begin{cases}a'=۰\Rightarrow\ \text{غ ق ق}\\a'=۶\end{cases}$$

می‌دانیم که $b^۲=۳a'$ است، در نتیجه:

$$b^۲=۳a'\xrightarrow{a'=۶}b^۲=۱۸\Rightarrow b=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

$$\text{طول قطر کوچک}=۲b=۲(۳\sqrt{۲})=۶\sqrt{۲}$$